MATEMATIKA EKONOMI

Akas Pinaringan Sujalu - H. Eddy Soegiarto, K. - Titin Ruliana

MATEMATIKA EKONOMI

Penulis
Dr. Akas Pinaringan Sujalu, M.P.
Prof. Dr. H. Eddy Soegiarto, K. S.E., M.M.
Dr. Titin Ruliana, M.M.

Penyunting
Ismi Aziz

Tata Letak
Aziziy

Desain Sampul
Rahmat

14.5 x 20.5 cm, vi + 164 hlm.
Cetakan I, Januari 2021

ISBN: 978-623-6995-29-7

Diterbitkan oleh:
ZAHIR PUBLISHING
Kadisoka RT. 05 RW. 02, Purwomartani,
Kalasan, Sleman, Yogyakarta 55571
e-mail : zahirpublishing@gmail.com

Anggota IKAPI D.I. Yogyakarta
No. 132/DIY/2020

I. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Kata "Matematika" berasal dari bahasa Yunani: *Mathema* = pengetahuan atau kata kerja: *Manthanein*=Belajar. Sehingga secara umum matematika ekonomi dan bisnis merupakan penerapan metode matematika untuk mewakili teori dan menganalisis masalah dalam ekonomi dan bisnis. Dengan konvensi, metode yang diterapkan ini berada di luar geometri sederhana, seperti aritmatika, kalkulus diferensial dan integral, persamaan linier dan diferensial, matriks aljabar, pemrograman matematika, dan metode komputasi lainnya. Kata **economy** berasal dari kata Yunani klasik: *μάθημα* (*mathema*), yang berarti "mata pelajaran", sering juga diartikan *household management*. Sebelumnya para pedagang Yunani telah memahami phenomena ekonomi dan bisnis dalam kehidupan manusa, seperti apabila terjadi kegagalan panen akan menyebabkan harga jagung meningkat di pasar, tetapi dapat saja kekurangan deposit emas mungkin dapat menurunkan harga jagung.

Matematika ekonomi dan bisnis merupakan ilmu teoritis dan terapan, yang tujuannya adalah deskripsi objek ekonomi dan bisnis, proses, dan fenomena yang diformalkan secara matematis. Sebagian besar teori ekonomi dan bisnis disajikan dalam hal model ekonomi dan bisnis. Dalam matematika ekonomi dan bisnis, sifat-sifat model ini dipelajari berdasarkan formalisasi konsep dan gagasan ekonomi dan bisnis. Dalam matematika ekonomi dan bisnis, temama tentang keberadaan nilai ekstrem parameter tertentu terbukti, sifat negara keseimbangan dan lintasan pertumbuhan keseimbangan dipelajari, dll. Matematika ekonomi dan bisnis merupakan model ekonomi dan bisnis yang menggunakan prinsip dan metode matematika untuk menciptakan teori ekonomi dan bisnis dan untuk penelitian ekonomi dan bisnis. Dengan demikian konsep matematika atau statistika yang mampu mengekspresikan konsep ekonomi dan bisnis dan permasalahanya serta menemukan pemecahannya disebut sebagai matematika ekonomi dan bisnis atau statistika ekonomi dan bisnis.

Mengapa Ekonomi Belajar Matematika?

Ekonomi merupakan ilmu sosial, tetapi kategori itu tidak hanya menggambarkan yang terjadi dalam ekonomi dan bisnis. Hal itu mencoba menjelaskan bagaimana perekonomian beroperasi dan membuat prediksi tentang berbagai kemungkinan yang mungkin terjadi pada variabel ekonomi dan bisnis tertentu jika perubahan tertentu terjadi, misalnya apa pengaruh kegagalan tanaman juga akan terjadi pada harga tanaman?, apa efek peningkatan pajak penjualan akan memiliki pada harga barang?, apa yang akan terjadi pada jumlah pengangguran jika pengeluaran pemerintah meningkat?. Ini juga menunjukkan beberapa pedoman bahwa perusahaan, pemerintah atau agen ekonomi dan bisnis lainnya mungkin mengikuti jika mereka ingin mengalokasikan sumber daya secara efisien.

Secara umum, semakin kompleks suatu masalah, akan semakin kompleks pula alat analisis yang digunakan untuk pemecahannya. Salahsatu alat yang selama ini dianggap mampu mengekspresikan kekompleksan permasalahan tersebut adalah model matematika. Mentransformasi model ekonomi dan bisnis kedalam model-model matematika, memungkinkan terjadinya peralihan tingkat kesulitan pemecahan masalah ekonomi dan bisnis ke dalam pemecahan masalah matematika. Untuk itu diperlukan pemahaman tentang beberapa konsep matematika sebagai syarat pemecahan masalah matematika, sehingga perlu dipelajari oleh ekonom dan pelaku bisnis. Hal ini diperlukan agar interpretasi pemecahan matematika dapat dikonversikan kedalam penyelesaian masalah ekonomi dan bisnis dan bisnis,

Teori ekonomi dan bisnis mengungkapkan hubungan antar variabel ekonomi secara kualitatif, misalnya: jika harga naik atau turun kuantitas permintaan berkurang atau naik, jika investasi bertambah maka pendapatan nasional meningkat, jika konsumsi meningkat maka pendapatan nasional meningkat. Teori Ekonomi dan bisnis tidak memberikan ukuran kekuatan hubungan secara tegas antara variabel ekonomi dan bisnis sedangkan matematika Ekonomi dan bisnis dapat membantu menyederhanakan hubungan tersebut dalam sebuah model yang disebut dengan model matematika.

Matematika sangat penting untuk setiap aplikasi ekonomi dan bisnis yang serius untuk bidang-bidang ini. Matematika memungkinkan para ekonom untuk melakukan tes yang dapat diukur dan menciptakan model untuk memprediksi aktivitas ekonomi dan bisnis di masa depan. Mentransformasikan suatu konsep dan model ekonomi dan bisnis kedalam model-model matematika memungkinkan terjadinya peralihan tingkat kesulitan pemecahan masalah ekonomi dan bisnis ke dalam pemecahan masalah matematika. Untuk itu diperlukan pemahaman tentang beberapa konsep matematika sebagai syarat pemecahan masalah matematika, sehingga perlu dipelajari oleh ekonom dan pelaku bisnis. Hal ini diperlukan agar interpretasi pemecahan matematika dapat dikonversikan kedalam penyelesaian masalah-masalah ekonomi dan bisnis dan bisnis.

Matematika memungkinkan para ekonom untuk membentuk proposisi yang bermakna dan dapat diuji tentang subjek yang luas dan kompleks yang kurang dapat diungkapkan secara informal. Lebih lanjut, bahasa matematika memungkinkan para ekonom untuk membuat klaim yang spesifik dan positif tentang subjek kontroversial yang tidak mungkin tanpa matematika. Banyak teori ekonomi dan bisnis saat ini disajikan dalam istilah model-medol matematika ekonomi dan bisnis, satu model hubungan matematika yang spesifik dan modern menegaskan untuk dapat memperjelas asumsi dan implikasi, diantaranya:

- optimasi masalah untuk tujuan keseimbangan, baik dari rumah tangga, bisnis, perusahaan, atau pembuat kebijakan
- statis (atau keseimbangan) analisis di mana unit ekonomi dan bisnis (seperti rumah tangga) atau sistem ekonomi dan bisnis (seperti pasar atau ekonomi dan bisnis) dimodelkan sebagai tidak berubah.
- statika komparatif sebagai perubahan dari satu keseimbangan lain yang disekan oleh perubahan dalam salah satu atau lebih faktor-faktor.
- dinamis analisis, melacak perubahan dalam sistem ekonomi dan bisnis dari waktu ke waktu, misalnya dari pertumbuhan ekonomi dan bisnis.

B. Teori Ekonomi dan Matematika Ekonomi

Teori Ekonomi pada umumnya berusaha untuk mengungkapkan hubungan antar variabel-variabel ekononomi secara kualitatif, misalnya, jika harga naik/turun kuantitas permintaan berkurang/naik, jika investasi bertambah maka pendapatan nasional akan meningkat, jika konsumsi meningkat maka pendapatan nasional meningkat, serta hubungan lainnya yang berkaitan dengan aktivitas ekonomi sebuah kelompok masyarakat. Teori Ekonomi yang terkait dengan phenomena tersebut, tidak memberikan ukuran kekuatan hubungan secara tegas antara variabel ekonomi.

Perbedaan mendasar antara Matematika ekonomi dan bisnis dengan Ekonometrika, secara sederhana terletak pada pemilihan dan pengukuran data ekonomi dan bisnisnya. Ekonometrika berhubungan dengan pembahasan tentang observasi empiris yang menggunakan estimasi dengan metode statistik dan pengujian hipotesis. Sedangkan Matematika Ekonomi dan bisnis membahas penerapan matematis pada aspek aspek teoritis murni dari analisis ekonomi dan bisnis, tanpa atau hanya sedikit memperdulikan masalah-masalah statistik seperti kesalahan pengukuran variabel yang sedang dipelajari. Untuk itu, pada bagian pendahuluan ini, diperlukan beberapa pemahaman tentang variabel, parameter, dan konstanta sebagai konsep dasar model matematika yang digunakan dalam penerapan pemecahan masalah nyata. Matematika ekonomi dan bisnis membuka pintu untuk pemodelan ekonomi dan bisnis sejati. Melalui bahasa matematika, model ekonomi dan bisnis teoritis telah berubah menjadi alat yang berguna untuk pembuatan kebijakan ekonomi dan bisnis sehari-hari.

II. SEJARAH MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

A. Latar Belakang

Sangat penting bagi setiap mahasiswa ekonomi untuk berkenalan dengan pengenalan dan pengembangan metode dan teknik yang digunakan di lapangan untuk dapat menilai mereka secara kritis. Dalam buku ini, saya bertujuan untuk denaturalisasi penggunaan matematika dalam ekonomi, proses pengenalan ke lapangan dan memperkenalkan pembaca dengan perdebatan utama seputar ekonomi matematika pada waktu itu untuk memberikan dimensi sejarah tentang me”matematika”kan ekonomi. Penerapan matematika dalam ilmu ekonomi merupakan penerapan matematika dalam ilmu sosial yang paling awal. Namun, penggunaan metode matematika dalam ilmu ekonomi mulai menonjol pada pertengahan abad ke 20. Peran matematika menjadi sangat penting dalam perkembangan ilmu ekonomi. Ilmu ekonomi kontemporer didominasi oleh pendekatan matematika.

B. Perjalanan Matematika dalam Ilmu Ekonomi

Meskipun metode matematika telah menjadi bagian integral dari sebagian besar konsep ilmu ekonomi, pengenalannya bukanlah proses yang alami dan lancar. Penggunaan teori-teori matematika ke dalam ekonomi bukan hanya proses yang panjang, tetapi juga melibatkan banyak upaya dan kegagalan untuk melakukannya dan disertai dengan perdebatan tentang kegunaannya.

Selama berabad-abad, peran matematika dan statistik telah menjadi semakin penting dalam ilmu pengetahuan sosial, khususnya ilmu ekonomi. Penggunaan matematika dalam pelayanan analisis sosial dan ekonomi dan bisnis berawal sejak abad ke-17. Dirunut dari sejarahnya, penggunaan matematika dalam ilmu ekonomi sebenarnya sudah lama dirintis, bahkan sebelum publikasi buku Adam Smith yang terkenal pada tahun 1776, *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. Di antaranya nama yang biasa dicatat adalah Daniel Bernoulli yang memformulasikan hipotesis *diminishing utility of wealth* pada tahun 1738 (Beaud & Dostaler, 1997).

Matematika mulai diperkenalkan ke dalam ekonomi pada abad ke-19 dan semakin diterima selama abad ke-20. Hal ini dapat dilihat dalam peningkatan substansial dalam proporsi artikel yang menggunakan aljabar dalam jurnal ekonomi. Pada tahun 1892 sekitar 95% dari artikel di empat jurnal ekonomi terkemuka tidak menggunakan representasi geometris atau notasi matematika. Sedangkan pada tahun 1930 sekitar 10% dari artikel *Economic Journal* dan *American Economic Review* menggunakan aljabar, sedangkan pada tahun 1980 proporsi ini naik menjadi 75 % dan pada tahun 1990 hanya 5% dari artikel tentang ekonomi pada jurnal-jurnal di seluruh dunia yang tidak menggunakan matematika.

Dirunut dari sejarahnya, penerapan paling awal dari analisis matematika dalam ilmu ekonomi dan bisnis adalah digunakannya teori evaluasi persamaan simultan (*simultaneous equations*) oleh Leon Walras untuk membahas problem ekualibrium dalam beberapa pasar yang berhubungan dan digunakannya kalkulus oleh Edgeworth untuk menganalisis perilaku konsumen. Berbagai permasalahan ini tetap berada pada inti matematika ekonomi dan bisnis modern, meskipun teknik-teknik matematika yang diterapkan telah berubah. Istilah "Revolusi marginal" dan "Revolusi Keynesia" memperkenalkan konsep ekonomi dan bisnis fundamental, termasuk konsep "nilai marginal", "pengganda ekonomi dan bisnis", "akselerator ekonomi dan bisnis", "elastisitas" dan banyak lainnya. Revolusi ini menyebabkan penggunaan alat matematika berdasarkan turunan dan integral dari perintah bilangan bulat, dan persamaan diferensial dan perbedaan. Akibatnya, model ekonomi dan bisnis dengan waktu yang berkelanjutan dan diskrit mulai dijelaskan secara matematis oleh persamaan diferensial dengan turunan dari persamaan bilangan bulat.

Dalam teori ekonomi dan bisnis, dibutuhkan konsep dan gagasan ekonomi dan bisnis baru yang memungkinkan untuk memperhitungkan keberadaan memori di agen ekonomi dan bisnis.Model dan metode ekonomi dan bisnis baru diperlukan, yang memperhitungkan bahwa agen ekonomi dan bisnis dapat mengingat perubahan indikator dan faktor ekonomi dan bisnis di masa lalu, dan bahwa ini mempengaruhi perilaku agen dan pengambilan keputusan mereka.Untuk menggambarkan perilaku ini, tidak dapat menggunakan alat matematika standar persamaan diferensial (atau perbedaan) pesanan bilangan bulat. Dengan kata lain, model ekonomi dan bisnis, yang hanya menggunakan turunan dari persamaan bilangan bulat, dapat diterapkan ketika agen ekonomi dan bisnis menyisihkan sejarah perubahan indikator dan faktor ekonomi dan bisnis selama periode waktu yang sangat kecil. Saat ini menjadi jelas bahwa pembatasan ini menahan perkembangan teori ekonomi dan bisnis dan matematika ekonomi dan bisnis.

C. Akhir Abad ke-18

Schumpeter mengambil fokus kembar sebagai asal untuk matematika ekonomi dan bisnis, berasal dari awal abad ke 19, Johann Heinrich von Thünen "*Der isolierte Staat di Beziehung aufLandwirtschaft und National Ökonomie*" 1826, dan Augustin Cournot's "*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*" tahun 1838. Selain itu juga dikenal ekonom ternama Frances Edgeworth, dengan karyanya yang paling penting ""*Mathematical Psychics*"" tahun 1881, Walras Wilfredo Pareto (1871:1974) dengan "*The Theory of Political Economy*" dan "*Manuel d'économie politique*", dan akhirnya Wilhelm Launhardt, dengan "*Mathemaische Begründung der Volkswirtschaftslehre*" 1885.

Informasi tersebut sama sekali tidak dimaksudkan untuk menjadi gambaran lengkap matematika ekonomi dan bisnis pada akhir abad ke-19, hanya untuk memberi kesan berapa banyak ekonom terlibat menggunakan matematika pada waktu itu, sehingga apa yang dimulai pada awal abad

19 diterapkan dengan kokoh pada periode selanjutnya. Metode matematika belum menembus ke semua aspek dan sistim setiap teori ekonomi dan bisnis, tetapi keragaman sedemikian rupa sehingga Schumpeter memperingatkan untuk menganggap matematika ekonomi dan bisnis sebagai semacam sekolah atau sekte dalam arti nyata.

Gaya instruksi muncul terutama di Jerman yang khusus membahas penyajian data secara detail karena terkait dengan administrasi publik. Sekelompok kecil profesor di Inggris menetapkan metode "penalaran oleh angka-angka pada hal-hal yang berkaitan dengan kinerja ke-pemerintah-an" dan mengacu pada praktik ini sebagai Aritmetik Politik. Sir William Petty menulis panjang lebar tentang isu-isu yang kelak akan menjadi perhatian para ekonom, seperti perpajakan, perputaran uang dan pendapatan nasional, tetapi sementara analisisnya bersifat numeric. Penggunaan data numerik rinci oleh Petty dan John Graunt mempengaruhi para ahli statistik dan ekonom untuk beberapa waktu, meskipun karya Petty sebagian besar diabaikan oleh para sarjana Inggris.

D. Abad ke-19

Matematisasi ekonomi dan bisnis dimulai pada abad ke-19, Debreu mengambil ekonomi dan bisnis matematika kurang lebih identik dengan teori keseimbangan ekonomi dan bisnis umum (kompetitif), di mana tidak ada tempat untuk persaingan yang tidak sempurna. Sebagian besar analisis ekonomi dan bisnis saat itu merupakan ekonomi dan bisnis klasik. Subyek didiskusikan dan dibagikan dengan cara aljabar, tetapi kalkulus tidak digunakan. Lebih penting lagi, sampai Johann Heinrich von Thunen pada tahun 1826, mengemukakan teori Thünen untuk menerapkan alat-alat matematika. Model penggunaan lahan pertanian Thünen merupakan contoh pertama analisis marginal. Dibandingkan dengan orang sezamannya, Thünen membangun model dan alat ekonomi dan bisnis, daripada menerapkan alat-alat sebelumnya untuk masalah baru.

Pemodelan ekonomi dan bisnis formal dimulai pada abad ke-19 dengan penggunaan kalkulus diferensial untuk mewakili dan menjelaskan perilaku ekonomi dan bisnis, seperti maksimalisasi utilitas. Ekonomi dan bisnis menjadi lebih matematis sebagai disiplin ilmu sangat memperluas penggunaan formulasi matematika dalam ilmu ekonomi dan bisnis. Sistematika ekonomi dan bisnis yang cepat ini mengkhawatirkan para pengkritik disiplin serta beberapa ekonom yang tercatat. John Maynard Keynes, Robert Heilbroner, Friedrich Hayek dan lain-lain telah mengkritik penggunaan luas model matematika untuk perilaku manusia, dengan alasan bahwa beberapa pilihan manusia tidak dapat direduksi menjadi matematika.

Sementara itu, sekelompok cendekiawan baru yang dilatih dalam metode matematika dari ilmu fisika tertarik pada ekonomi dan bisnis, mengadvokasi dan menerapkan metode-metode tersebut pada subjek mereka, dan digambarkan sebagai perubahan dari geometri ke mekanika. Ini termasuk W.S. Jevons yang mempresentasikan makalah pada "teori matematika umum ekonomi dan bisnis politik" pada tahun 1862, memberikan garis besar untuk penggunaan teori utilitas marjinal dalam ekonomi dan bisnis politik. Pada 1871, menerbitkan *The Principles of Political Economy*, menyatakan bahwa subjek sebagai ilmu "harus matematis hanya karena berhubungan dengan kuantitas." Jevons memunculkan data statistik untuk harga dan kuantitas akan memungkinkan subjek yang disajikan menjadi ilmu pasti.

E. Abad ke-20

Matematika ekonomi dan bisnis dikembangkan dari suatu cabang teori ekonomi dan bisnis yang relatif kecil pada tahun 1950 sampai akhirnya berkembang menjadi hampir sama dengan teori ekonomi dan bisnis yang lain. Keberhasilan perkembangan penerapan matematika dalam ilmu ekonomi dan bisnis klasik karena para ekonom bersimpati terhadap berbagai asumsi dan model dasar teori ekonomi dan bisnis neo klasik yang mengharuskan para ekonom untuk memberikan formulasi matematika terhadap teori ekonomi dan bisnis radikal. Pesatnya perkembangan matematika ekonomi dan bisnis setelah tahun 1950 sebagian disekan arus perpindahan ahli-ahli matematika menjadi akademisi ekonomi dan bisnis seperti Kenneth Arrow, Gerard Debreu, Frank Hahn dan lain-lain. Eksodus ahli-ahli matematika tersebut akibat meningkatnya perhatian pada semua cabang ekonomi dan bisnis yang mempunyai ketegasan format dan mantapnya ekonomi dan bisnis sebagai suatu cabang disiplin ilmiah. Sebelum terjadi formalisasi matematika pada teori ekonomi dan bisnis dan sebelum dikenal teknik-teknik canggih dalam analisis matematika, teori ekonomi dan bisnis terutama bertumpu pada teknik-t analisis grafik dan presentasi.

Perbedaan matematika murni dengan matematika ekonomi dan bisnis adalah sebagai berikut:

No	Matematika Murni	Matematika Ekonomi dan bisnis
1	Penggunaan simbol-simbol variabelnya menggunakan simbol matematika yang umum. Misalnyanya: X, Y dan Z	Penggunaan simbol-simbol variabelnya sesuai dengan nama variabel ekonomi dan bisnisnya. Misalnya: Price (P), cost (C) dan lain-lain
2	Nilai-nilai variabel bisa bernilai positif dan negatif	Nilai-nilai variabelnya selalu positif
3	Penggambaran sumbu Price (P) sebenarnya pada sumbu horisontal karena merupakan variabel bebas	Penggambaran sumbu Price (P) dibuat pada sumbu vertikal
4	Proses penemuan rumus dan pemakaian rumus	Aplikasi penerapan matematika dalam ilmu ekonomi dan bisnis

5	Orientasi umum dan terbuka	Orientasi memecahkan permasalahan ekonomi dan bisnis

G. Ilmuwan Matematika Ekonomi dan bisnis

G.1. Augustin Cournot

Cournot, seorang profesor matematika, mengembangkan pengobatan matematika pada 1838 untuk "*duopolly*" kondisi pasar yang ditentukan oleh persaingan antara dua penjual, disebut *Cournot duopoly*. Diasumsikan bahwa kedua penjual memiliki akses yang sama ke pasar dan dapat memproduksi barang mereka tanpa biaya. Selanjutnya, diasumsikan bahwa kedua barang itu homogen. Setiap penjual akan memvariasikan outputnya berdasarkan output dari yang lain dan harga pasar akan ditentukan oleh jumlah total yang diberikan. Keuntungan untuk setiap perusahaan ditentukan dengan mengalikan output mereka dan harga pasar per unit.

Kontribusi Cournot terhadap *mathematization of economics* telah diabaikan selama beberapa dekade, tetapi akhirnya mempengaruhi banyak kaum marginal. Model Cournot tentang "*duopolly*" dan Oligopoli juga merupakan salah satu formulasi pertama dari permainan non-kooperatif.

G.2. Léon Walras

Pada tahun 1874 dan 1877 Walras diterbitkan Elemen Ekonomi dan bisnis Murni, sebuah karya yang membuatnya dianggap sebagai bapak teori ekuilibrium umum. Sementara Cournot memberikan solusi untuk apa yang kemudian disebut ekuilibrium parsial, Léon Walras berusaha memformalkan diskusi tentang ekonomi dan bisnis secara keseluruhan melalui teori keseimbangan kompetitif umum. Perilaku setiap pelaku ekonomi dan bisnis akan dipertimbangkan pada sisi produksi dan konsumsi. Solusi dari sistem persamaan yang dihasilkan (baik linear dan non-linear) merupakan keseimbangan umum. Pada saat itu, tidak ada solusi umum yang dapat diekspresikan untuk sistem persamaan banyak yang sewenang-wenang, tetapi upaya Walras menghasilkan dua hasil yang terkenal di bidang ekonomi dan bisnis. Yang pertama merupakan hukum Walras dan yang kedua merupakan prinsip *tânnement*. Metode Walras dianggap sangat matematis untuk saat itu dan Edgeworth berkomentar panjang lebar tentang fakta ini dalam ulasannya tentang *Elements of Pure Economics*.

Hukum Walras yang menyatakan bahwa jika mempertimbangkan setiap pasar tertentu, jika semua pasar lainnya dalam suatu perekonomiandalam keseimbangan, maka pasar tertentu juga harus dalam keseimbangan. Hukum Walras bergantung pada gagasan matematika tentang permintaan pasar berlebih (atau proposisi terbalik, pasokan pasar berlebih) harus dijumlahkan ke nol. Notasinya berbeda dari notasi modern tetapi dapat menggunakan notasi penjumlahan yang lebih modern.

Walras berasumsi bahwa dalam ekuilibrium, semua uang akan dihabiskan untuk semua barang: setiap barang akan dijual dengan harga pasar untuk barang itu dan setiap pembeli akan membelanjakan dolar terakhir mereka untuk sekeranjang barang. Mulai dari asumsi ini, Walras kemudian dapat menunjukkan bahwa dalam ekonomi dan bisnis pasar dengan n, itu sudah cukup untuk memecahkan n-1 persamaan simultan untuk kliring pasar. Ini paling mudah untuk divisualisasikan dengan dua pasar (dianggap dalam kebanyakan teks sebagai pasar barang dan pasar untuk uang). Jika salah satu dari dua pasar telah mencapai keadaan setimbang, tidak ada barang tambahan (atau sebaliknya, uang) yang dapat masuk atau keluar dari pasar kedua, jadi itu harus dalam keadaan seimbang juga.

G.3. Francis Ysidro Edgeworth

Edgeworth yang pertama untuk menerapkan teknik-teknik tertentu matematis formal untuk pengambilan keputusan individu di bidang ekonomi dan bisnis, memperkenalkan unsur-unsur matematika untuk Ekonomi dan bisnis secara eksplisit dalam Psikologi Matematika: Sebuah Esai tentang Aplikasi Matematika untuk Ilmu Moral, yang diterbitkan pada 1881. Dia mengadopsi kalkulus *felicific* yang dikemukakan Jeremy Bentham untuk perilaku ekonomi dan bisnis, sehingga memungkinkan hasil dari setiap keputusan untuk diubah menjadi perubahan dalam utilitas. Dengan menggunakan asumsi ini, Edgeworth membangun model pertukaran pada tiga asumsi: individu tertarik pada diri sendiri, individu bertindak untuk memaksimalkan utilitas, dan individu yang "bebas”

Mengingat dua individu, rangkaian solusi di mana kedua individu dapat memaksimalkan utilitas digambarkan oleh kurva kontrak yang sekarang dikenal sebagai “*Edgeworth Box*“ atau Kotak Edgeworth”. Kurva ini juga dikenal sebagai Kotak Edgeworth-Bowley, adalah untuk menunjukkan dengan cara yang jelas dan sederhana bahwa orang memiliki kemampuan untuk mencapai anugerah barang yang melaporkan tingkat kepuasan atau utilitas tertinggi. Kotak ini memungkinkan secara grafis mewakili keranjang konsumsi barang dan preferensi yang berbeda dari mereka yang terlibat. Dengan demikian, dimungkinkan untuk melakukan analisis sistem ekonomi dan bisnis dan alokasi yang dapat didefinisikan sebagai efisien dalam distribusi. Model yang diusulkan oleh Edgeworth ini mengasumsikan bahwa anugerah awal yang dimiliki setiap pengguna harus menyiratkan adanya keseimbangan gand

Sementara di *The Economic Journal*, Edgeworth cenderungmemperhatikan bahwa monopoli menghasilkan barang yang memiliki persekutuan pasokan tetapi bukan gabungan permintaan (seperti kelas satu dan kelas ekonomi dan bisnis di pesawat terbang, jika pesawat terbang, kedua set kelas kursi terbang bersamaan). *Seligman* bersikeras bahwa hasil yang diraih Edgeworth merupakan persamaan dari formulasi matematikanya, menyarankan bahwa asumsi fungsi permintaan terus-menerus dan perubahan sangat kecil dalam pajak menghasilkan prediksi paradoks. *Harold*

Hotelling kemudian menunjukkan bahwa Edgeworth benar dan bahwa hasil yang sama ("penurunan harga sebagai akibat dari pajak") dapat terjadi dengan fungsi permintaan dan perubahan besar dalam tarif pajak.

G.4. Irving Fisher

Merupakan salah satu tokoh ekonomi dan bisnis neo-klasik Amerika yang memperkenalkan pendekatan matematis yang revolusioner dalam ekonomi dan bisnis. Pemikirannya antara lain *Walrasian Equilibrium* (keseimbangan Walrasian) serta konsep kurva Philips. Dia juga menemukan sistim *rolodes* yang digunakan dalam perbankan, selain itu juga menemukan teori harga (*Price Theory*). Beberapa teori yang dicetuskannya digunakan secara luas, diantaranya:

G.4.1. Teori transaksi (e-*change equation*)

Teori ini berpendapat bahwa nilai uang terantung pada jumlah uang yang beredar, kecepatan uang, dan jumlah barang yang diperdagangkan. Teori Irving Fisher) yang mengatakan bahwa inflasi hanya bisa terjadi jika ada penambahan volume jumlah uang beredar, karena hubungan jumlah uang beredar terhadap inflasi adalah sebanding. Secara matematis dapat dirumuskan

$M.V = P.T$

Dimana :

M = jumlah uang yang beredar

V = kecepatan peredaran uang

P = harga barang

T = Jumlah barang yang diperdagangkan

Apabila semakin besar jumlah uang beredar dan kecepatan peredarannya maka semakin besar tingkat harga dan transaksi jual beli pada masyarakat. Kenaikan tingkat harga secara terus-menerus disebutkan semacam inflasi. Apabila jumlah peredaran uang terus menerus bertambah maka akan berefek pada kenaikan tingkat harga yang secara terus menerus pula. Oleh karena itu, jumlah peredaran uang dengan inflasi berhubungan sebanding.

G.4.2. Teori Suku Bunga

Teori suku bunga ini berkaitan dengan "I" tingkat suku bunga nominal dengan tingkat inflasi dan Π sebenarnya suku bunga r. R tingkat bunga riil merupakan tingkat bunga setelah penyesuaian akibat pengaruh inflasi. Ini merupakan tingkat suku bunga pinjaman yang harus tersedia untuk pinjaman luar dana. Hubungan Fisher mendalilkan antara 3 tingkat adalah :

$(1 + i) = (1 + r)(1+ \Pi) = 1 + r + \Pi + \Pi r$

Jadi, menurut persamaan ini, jika Π meningkat sebesar 1% kenaikan suku bunga nominal akan lebih dari 1%. Ini juga berarti bahwa jika r dan Π dikenal maka I dapat ditentukan. Di sisi lain, jika I dan Π dikenal maka r dapat ditentukan dengan rumus:

$1 + r = (1 + i)/(1 + \Pi)$ atau $r = (1- \Pi) / (1 + \Pi)$

Ketika Ԥ dan r kecil maka besarnya mendekati “i - Ԥ”, namun dalam situasi yang melibatkan tingkat inflasi yang tinggi hubungan yang lebih akurat harus diperhitungkan.

H. Paul Anthony Samuelson

Merupakan Ekonom Amerika Serikat kelahiran Gary, Indiana, 15 Mei 1915. Samuelson dikenal sebagai bapak ekonomi dan bisnis neo-keynesian dan merupakan tokoh pengembangan neoklasikal ekonomi dan bisnis. Selain menjabat sebagai profesor di MIT, ia merupakan penulis buku best seller yang menerangkan mengenai ekonomi dan bisnis *keynesian* yang diterbitkan pada tahun 1948, *Economics: an Introductory Analysis*, yang dicetak secara besar-besaran sebagai buku pertama yang berisi teori penggabungan penggunaan matematika dalam ekonomi dan bisnis, *Foundation of Economic Analysis*. Merupakan Ekonom yang mendapatkan penghargaan Nobel dalam ekonomi dan bisnis pada tahun 1970 atas kontribusinya dalam bidang ekonomi dan bisnis yang fundamental.

Ia memberikan sumbangan teori penggabungan antara ilmu matematika dan ekonomi dan bisnis. Ia merupakan profesor dalam bidang ilmu stabilitas dan dinamika sistem ekonomi dan bisnis, penggabungan teori perdagangan internasional dengan keseimbangan ekonomi dan bisnis umum, analisis publik, teori modal, ekonomi dan bisnis kesejahteraan dan pengeluaran publik. Samuelson menggabungkan teori termodinamika dengan statistik perbandingan pada ekonomi dan bisnis. Metode ini menerangkan tentang perubahan dalam masalah kesetimbangan ekonomi dan bisnis.

III. MODEL MATEMATIKA EKONOMI

A. Latar Belakang

Dalam suatu perekonomian, hubungan antara variabel-variabel ekonomi yang satu dengan lainnya sangat kompleks. Oleh karena itu, untuk memudahkan hubungan antar varibel ini, maka cara yang terbaik adalah memilih dari sekian banyak variabel ekonomi yang sesuai dengan permasalahan ekonomi, kemudian dihubungkan sedemikian rupa sehingga bentuk hubungan antar-variabel ekonomi menjadi sederhana dan relevan dengan keadaaan ekonomi yang ada. Matematika dapat membantu menyederhanakan hubungan antara berbagai variabel yang terdapat dalam suatu sistem perekonomian dan bisnis. Penyederhanaan hubungan antara variabel ekonomi ini sering disebut model ekonomi, karena hanya merupakan kerangka dasar dari dunia nyata yang sesungguhnya. Model ekonomi ini dapat berbentuk model matematika dan non-matematika.

B. Model Ekonomi

Model adalah representasi dari objek atau situasi atau kondisi yang sebenarnya. Model dapat disajikan dalam berbagai bentuk, yang salah satunya adalah model ekonomi. Model ekonomi adalah bangunan logika yang berusaha menyederhanakan hubungan sebab-akibat yg rumit dan pengaruh diantara elemen-elemen yg saling berinteraksi dalam perekonomian. Dengan demikian, model ekonomi merupakan suatu konsep atau model yang menggabungkan dua atau lebih variabel yang: (a) menjelaskan hubungan yang ada antara variabel-variabel; (b) menggambarkan hasil ekonomis dari hubungan tersebut; (c) memperkirakan akibat perubahan variabel terhadap hasil perekonomian.

Dalam ilmu ekonomi, model ekonomi didefinisikan sebagai suatu konstruksi teoritis dan kerangka analisis ekonomi yang terdiri dari himpunan teori dan konsep, definisi, anggapan, persamaan, kesamaan (identitas) dan ketidaksamaan dari mana kesimpulan akan diturunkan. Model ekonomi merupakan suatu abstraksi tentang hubungan-hubungan ekonomi, untuk menyederhanakan penanganan masalah-masalah riil ekonomi yang sangat kompleks. Model-model ekonomi ini umumnya dibentuk untuk mempelajari tingkah laku unit-unit ekonomi dalam hubungannya dengan pemilihan atau proses dan kegiatan-kegiatan: produksi, konsumsi, distribusi, penyimpanan barang dan/atau jasa.

Pengertian lain yang diberikan mengenai model ekonomi adalah separangkat hubungan terorganisasi yang memberikan berfungsinya suatu kesatuan ekonomi (rumah tangga atau perusahaan dalam perekonomian nasional atau dunia) dengan separangkat asumsi yang disederhanakan. Seluruh model ekonomi terdiri dari tiga struktural dasar yaitu:

a. separangkat variabel (terdiri variabel *exogenous* dan variabel *endogeno*us);
b. suatu daftar hubungan fundamental (hubungan fungsional antara variabel bebas dan variabel bergantung);
c. sejumlah koefisien yang strategis (hubungan kausal yang tepat antara variabel).

Pada model ekonomi akan dijumpai berbagai kemungkinan dan bentuk abstraksi mengenai gejala ekonomi karena adanya perbedaan persepsi peneliti dan tujuan pembuatan model yang dimaksud. Misalnya, dalam Ekonomi Makro banyak dijumpai berbagai model permintaan uang, investasi, konsumsi, permintaan dan penawaran agregat. Dengan demikian tidak jarang apa yang dibahas oleh peneliti dibidang ekonomi mengenai gejala tertentu akan berbeda atau bahkan mungkin bertentangan dengan pengamat/ekonom lain. Terlebih lagi jika yang dibicarakan terpusat pada model ekonomi dinamis. Hal ini disebabkan karena deskripsi mengenai spesifikasi dinamis dipengaruhi oleh berbagai faktor, misalnya perilaku dan tindak-tanduk pelaku ekonomi, peranan dan kebijakan penguasa ekonomi, faktor-faktor kelembagaan dan pandangan pembuat model ekonomi terhadap realitas yang dihadapi

Bentuk model-model ekonomi ini, di samping yang bersifat verbal kita kenal model dalam bentuk fungsi umum-kualitatif, angka-tabel-grafik dan fungsi khusus aljabar/matematis. Ketiga jenis/bentuk model ini pada hakekatnya hanya dapat dibedakan, namun sebenarnya sulit untuk dipisahkan karena bentuk/jenis model yang satu bukan merupakan substitusi dari yang lain, melainkan dalam batas-batas tertentu lebih bersifat komplementer. Dengan kata lain, bentuk/jenis model yang satu dapat dipergunakan untuk melengkapi dan menyempurnakan bentuk/jenis model yang lain dan bukan untuk menggantikannya.

Model ekonomi dipergunakan untuk merangkum ciri-ciri penting fenomena ekonomi yang rumit, menyederhanakan dan menerjemahkannya sehingga dapat dilakukan penganalisisan yang dapat dipahami. Biasanya tugas ini menuntut pembual model membuat asumsi tertentu yang disederhanakan tentang perilaku manusia. Sebagai contoh, dalam penganalisisan permintaan, ahli ekonomi mengasumsikan bahwa konsumen mencari kepuasannya atau kegunaan yang maksimum sehingga konsumen akan secara rasional mengkonsumsi lebih banyak suatu produk yang harganya menurun, dan sebaliknya.

C. Model Matematika

Apabila model ekonomi berbentuk persamaan matematika, maka akan terdiri dari satu atau sekumpulan persamaan. Seringkali juga hubungan antar berbagai variabel itu disusun dalam sebuah model yang disebut dengan model matematika. Model matematika diberikan untuk menjelaskan fenomena dalam dunia ekonomi makro seperti modal/kapital, tenaga kerja, pengetahuan, inovasi, dan lain-lain dalam riset dan pengembangannya.

Model matematika merepresentasikan suatu masalah dengan sistem yang mencerminkan hubungan antar simbol atau hubungan matematis. Sebagai contoh, permintaan sebuah komoditi P, penerimaan dari hasil penjualan produk Q adalah R, biaya total untuk memproduksi Q adalah C, dan laba total dari penjualan Q ditentukan dengan mendapatkan selisih antara penerimaan R dengan total biaya C dari jumlah Q yang yang terjual, maka model matematika yang dapat dibuat adalah: 1. $P = a + bQ$; a dan b konstanta,

2. $R = PQ = (a + bQ)Q = aQ + bQ2$
3. $C = c + dQ$; c dan d konstanta,
4. $\pi = R - C$

Tujuan dari adanya sebuah model matematika adalah, memungkinkan dilakukan proses pengambilan keputusan mengenai situasi nyata dengan menganalisis model tersebut. Nilai kesimpulan dan keputusan berdasarkan model tergantung pada seberapa

Berbeda halnya dengan matematika murni, yang menggunakan simbil-simbol yang umum di gunakan, yaitu x, y, z. Simbol-simbol dalam matematika ekonomi dan bisnis sesuai dengan variabel ekonomi dan bisnisnya, misalnya harga (P=*price*), kualitas (Q=*quantity*), biaya (C=*consumption*), dan lain-lainnya. Pada matematika ekonomi dan bisnis nilai-nilai variabel harus bernilai positif. Matematika ekonomi dan bisnis tidak mengenal variabel yang nilainya negatif. Sebagai contoh secara konsep ekonomi dan bisnis, terdapat gejala bahwa permintaan sebuah komoditi sangat bergantung pada harganya, dengan anggapan bahwa faktor lain yang dapat mempengaruhi permintaan komoditi tersebut dianggap konstan (*ceteris paribus*). Gejala tersebut dapat diekspresikan sebagai sebuah fungsi matematik $Q = f(P)$. Jika hubungan tersebut diasumsikan linear, maka kemudian dapat diperjelas dengan model linear $Q = a + bP$, dengan Q adalah kuantitas permintaan komoditi dan P adalah harga satuannya, dan a dan b adalah parameter atau koefisien. Sehingga model ekonomi dan bisnis kualitatif dapat didekati dengan model kuantitatif. Dengan demikian konsep matematika atau statistika yang mampu mengekspresikan konsep ekonomi dan bisnis dan permasalahannya serta menemukan pemecahannya disebut sebagai matematika ekonomi dan bisnis atau statistika ekonomi dan bisnis.

Selain model linier sederhana tersebut di atas, masih banyak model matematika lainnya yang mampu mengekspresikan phenomena ekonomi maupun bisnis dalam dunia nyata. Sebagai contoh, model eksponensial dapat mengekspresikan kasus pertumbuhan penduduk, pertumbuhan pendapatan suatu negara, model multivariate dapat mengungkapkan pengaruh berbagai variabel terhadap permintaan dan penawaran sebuah komoditi, model linier programming, model kalkulus differensial yang banyak diaplikasikan dalam menyelesaikan masalah ekonomi dan bisnis yang menyangkut optimalisasi, dan model matematika lainnya dengan berbagai manfaatnya. Untuk itu, pada bagian pendahuluan ini, diperlukan beberapa pemahaman tentang variabel, parameter, koefisien dan konstanta sebagai konsep dasar model matematika yang akan digunakan dalam penerapan pemecahan masalah nyata.

D. Variabel dan Konstata

Model matematika pada umumnya dinyatakan dengan berbagai simbol dan kombinasi antara variabel dan konstanta. Variabel merupakan unsur yang sifatnya berubah-ubah dari satu keadaan ke keadaan lainnya, dan dalam suatu rumusan fungsi dapat dibedakan menjadi variabel bebas dan tidak bebas. Variabel bebas yaitu variabel yang dapat menerangkan variabel lainnya (mempengaruhi), Variabel tidak bebas yaitu variabel yang diterangkan oleh variabel bebas (dipengaruhi). Dalam matematika terapan ekonomi dan bisnis, variabel sering dilambangkan dengan huruf yang ada didepan nama variabel tersebut. Contoh: Harga (*price*) = P, jumlah yang diminta (*quantity*) = Q, Biaya (*cost*) = C, penerimaan (*revenue*) = R, Investasi (*investment*) = I, tingkat suku bunga (*interest rate*) = i.

Variabel dalam ekonomi ada dua, yaitu variabel endogen dan variabel eksogen. Variabel endogen adalah variabel yang nilai penyelesaiannya diperoleh dalam model. Variabel eksogen adalah variabel yang nilai penyelesaiaannya diperoleh dari luar model, atau sudah ditentukan dari data yang ada. Perlu diingat bahwa suatu variabel mungkin merupakan variabel endogen pada suatu model tertentu tetapi juga bisa sebagai variabel eksogen pada model yang lain. Misalnya, dalam analisis penentuan harga dan jumlah keseimbangan pasar suatu barang, maka variabel P merupakan variabel endogen, karena nilai variabel P akan diperoleh melalui penyelesaian di dalam model. Tetapi, dalam rangka penentuan pengeluaran konsumen, variabel P merupakan variabel eksogen, karena variabel P merupakan data konsumen perorangan.

Konstanta adalah suatu besaran bilangan atau angka yang sifatnya tetap dan tidak berubah untuk suatu kasus dan tidak terkait dengan suatu variabel. Konstanta atau koefisien yang sifatnya masih umum disebut sebagai parameter, artinya besarannya tetap untuk suatu kasus, tetapi berubah pada kasus lainnya. Sebagai contoh persamaan: $Y = 10 + 2X$, nilai 10 dan 2 adalah konstanta, X adalah variabel bebas dan Y adalah variabel tidak bebas atau variabel terikat, konstanta 2 dapat disebut sebagai koefisien variabel X. Selanjutnya jika persamaan secara umum: Y = a + b X, a dan b adalah konstanta, dalam hal ini a dan b dapat disebut juga parameter, karena nilainya dapat berbeda untuk mengungkapkan kasus yang sama pada objek yang berbeda.

Apabila konstanta dan variabel digabungkan menjadi satu, missal: 4P, 0.3C maka angka konstanta yang ada didepan variabel disebut koefisien. Dapat dikatakan bahwa koefisien adalah angka pengali konstan terhadap variabel. Dengan demikian koefisien merupakan bilangan atau angka yang diletakkan tepat didepan suatu variabel, dan terkait dengan variabel yang bersangkutan. Jika konstanta digabungkan dengan variabel,dimana konstanta tadi disimbolkan dengan a, maka yang terjadi adalah aR, aP atau aC. Sehingga Nilai a ini adalah suatu konstanta yang bersifat variabel, maka disebut konstanta parameter atau parameter. Sehingga dikatakan bahwa parameter adalah nilai tertentu dalam masalah tertentu dan mungkin akan menjadi nilai yang lain pada masalah yang lain.

Parameter biasanya dilambangkan dengan huruf awal abjad Yunani atau Arab, misalnya, α, β, dan χ, atau a, b, dan c. Hal ini tidak lain untuk membedakan dengan lambang variabel, sehingga kalau digabungkan tidak akan memperoleh huruf yang sama. Perlu diketahui bahwa parameter ditulis dengan huruf kecil.

IV. ANALISA DERET HITUNG DAN PENERAPANNYA DALAM BIDANG EKONOMI DAN BISNIS

A. Pengertian

Ada suatu cerita tentang seorang hamba yang meminta kepada rajanya untuk diberi beras dengan cara meletakkan 1 butir beras pada kotak pertama sebuah papan catur. Kemudian meletakkan 2 butir pada kotak kedua, 4 butir pada kotak ketiga, dan seterusnya, sehingga setiap kotak selanjutnya harus diisi dengan beras sebanyak kuadrat dari jumlah beras yang ada pada kotak sebelumnya. Ternyata beras seluruh negeri tidak cukup untuk memenuhi permintaan hamba ini.

Leonardo da Pisa atau *Leonardo Pisano* (1175 – 1250), dikenal juga sebagai Fibonacci, adalah seorang matematikawan Italia yang dikenal sebagai penemu bilangan Fibonacci dan perannya dalam mengenalkan sistem penulisan dan perhitungan bilangan Arab ke dunia Eropa (algorisma). Leonardo adalah orang yang memperkenalkan deret, ia menuliskan semua teori dan konsep yang telah dipelajari dalam buku *Liber Abaci*, atau Buku Perhitungan tentang penggunaan metode India sebagai metode menghitung yang luar biasa. Mereka menggunakan angka/simbol Hindu-Arab dengan menggunakan sembilan angka dan simbol nol. Fibonacci memperkenalkan metode ini dan menyebarluaskan ke Eropa penggunaan angka bergaya India ini (Latin *Modus Indorum*). Angka-angka inilah yang kita kenal sekarang sebagai angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dan 0. Melalui Buku *Liber Abaci*, Fibonacci menunjukkan kepraktisan sistem bilangan Arab dengan cara menerapkannya ke dalam pembukuan dagang, konversi berbagai ukuran dan berat, perhitungan bunga, pertukaran uang dan berbagai aplikasi lainnya. Konsep barisan dan deret akan selalu terkait dengan bilangan-bilangan dan aturan-aturan tertentu yang menghubungkan bilangan-bilangan tersebut.

B. Deret Hitung

.Deret (*series*) merupakan serangkaian bilangan yang terbentuk dengan pola atau urutan yang teratur. Urutan atau deret terhingga mempunyai bilangan pertama dan terkhir yang terdefinisi, sedangkan urutan dan deret tak berhingga mempunyai bilangan yang terus menerus. Bilangan-bilangan yang merupakan unsur pembentuk deret disebut suku. Suku baik dalam deret hitung maupun deret ukur dinotasikan dengan huruf U. Jumlah nilai suku-suku umumnya dinotasikan dengan huruf S namun literatur lain juga menggunakan huruf S. Berdasarkan jumlah sukunya, deret terbagi menjadi deret berhingga dan deret tak berhingga. Deret berhingga merupakan deret yang memiliki jumlah suku yang terbatas sedangkan deret tak berhingga merupakan deret yang jumlah sukunya tidak terbatas. Berdasarkan pola perubahan bilangan di setiap sukunya, deret terbagi menjadi deret hitung, deret ukur, dan deret harmoni.

Dalam deret hitung (*aritmatic sequence*), perbedaan atau selisih dari satu suku ke suku berikutnya selalu sama atau selisih yang tetap (konstan). Angka selisih yang konstan ini dinamakan pembeda. Pembeda dapat ditentukan dari selisih antara 2 suku yang berurutan. Deret hitung dapat dinyatakan sebagai A, A+d, A+2d, A+3d,..., di mana A menunjukkan suku (angka) pertama dan d menunjukkan perbedaan umum antara setiap suku. Di bawah ini merupakan contoh deret hitung:

{4, 6, 8, 10, 12, 14} ——> pembeda = 2

B.1. Nilai Dari Suku Ke-n (Un)

Untuk mencari nilai dari suatu suku dapat langsung menggunakan rumus. Namun untuk lebih memahami deret hitung sebaiknya juga memahami bagaimana rumus tersebut dibentuk. Perhatikan contoh di bawah ini. Terdapat sebuah deret hitung dengan suku awal a = 3 dan pembeda = 3, nilai suku-suku berikutnya yang terbentuk otomatis merupakan {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24}. Berdasarkan pola tersebut maka rumus untuk mencari nilai dari suatu suku berarti:

$$U_n = a + (n-1)b$$

Contoh soal 1:

Apabila dalam suatu deret diketahui suku ke 3 (a_3) = 150 dan suku ke 7 (a7) = 170. Carilah suku ke 10 dan suku ke 5.

Jawab :

Suku ke 3: S3 = a + (n-1)b

150 = a + (3- 1)b

150 = a + 2b

Suku ke 7: S7 = a + (n-1)b

170 = a + (7-1)b

170 = a + 6b

Menggabungkan 2 persamaan

150 – 2b = 170 – 6b

4b = 20

b = 5

150 = a + 2b

a = 150 – 10 = 140

Sehingga suku ke 10:

S10 = 140+(10-1)5

= 140 + 45

= 185

Suku ke 3:

S5 = 140 + (5-1)5

= 140 + 20

= 16

Selanjutnya diperoleh suku 1 = 140 dengan pembeda (b) = 5

Contoh soal 2:

Baris hitung X nilai suku 1 sebesar 350 dan pembeda -10. Sedangkan baris hitung Y nilai suku 1 sebesar 50 dan pembeda 10. Pada suku ke berapa baris X dan Y mempunyai nilai sama?

Jawab

Baris hitung X: Sx = a + (n -1)b

= 350 + (n – 1) (-10)

= 360 + 10n

Sy = a + (n -1)b

= 50 + (n – 1) (10)

= 40 - 10n

Baris X dan Y mempunyai nilai yang sama, maka

Sx = Sy..........340 + 10n = 40 - 10n

340 – 40 = 10n + 10 n

n = 16,

baris X dan baris Y mempunyai nilai yang sama pada n = 16

B.2. Jumlah Nilai Suku Ke-n (*Sn)*

Jumlah suku ke-n dapat dihitung menggunakan rumus yang dapat pahami melalui contoh berikut (gunakan deret hitung yang sama dengan yang di atas). Misalkan terdapat deret hitung {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24}. Suku pertama (a) = 3 dan pembeda (b) = 3 maka jumlah suku-sukunya dapat menggunakan rumus deret hitungnya merupakan:

$\mathbf{Sn = \frac{n}{2} (2a + (n-1)b)}$ atau $\boldsymbol{Sn = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)}$

dengan,

a = Suku pertama
b = beda
Sn = Jumlah suku n pertama

Contoh soal 3:

Tentukan jumlah 63 data (S_{63}) dari suatu deret -19, -13, -7, ….

Jawab:

$a_{63} = a_1 + (n-1)b$
$= -19 + (63-1)\ 6$
$= -19 + 372$
$= 353$

$S_{63} = n/2(a_1 + a_n)$
$= (63/2)(-19 + 353)$
$= (31.5)(334)$
$= 10521$

Contoh soal 4:

Besarnya penerimaan PT Cemerlang dari hasil penjualan barangnya Rp. 720 juta pada tahun ke 5, dan Rp 980 juta pada tahun ke 7. Bila perkembangan penerimaan penjualan tersebut berpola seperti deret hitung, berapa perkembangan penerimaan per tahun?

a. berapa besar penerimaan pada tahun pertama dan
b. pada tahun keberapa penerimaannya sebesar Rp. 460 juta

Jawab;:

S7 = 980 → a + 6 b = 980
S7 = 720 → a + 4 b = 720
2 b = 260 → b = 130

perkembangan penerimaan per tahun sebesar Rp. 130 juta

a + 4 b = 720 → a = 720 - 4 b
= 720 - (4(130))
= 200

Penerimaan pada tahun pertama sebesar Rp. 200 juta

$$S_n = a + (n-1)\,b \rightarrow 460 = 200 + (n-1)\,130$$
$$460 = 200 + 130\,n - 130$$
$$390 = 130\,n \rightarrow n = 3$$

Penerimaan sebesar Rp. 460 juta diterima pada tahun ke 3

Latihan Soal

1. Jika diketahui suku ke 2 = 273 dan suku ke 6 = 375
   a. Berapakah suku ke 1 baris hitung tersebut
   b. Berapakah nilai suku ke 10
   c. Berapakah jumlah 10 suku pertamanya
2. Baris hitung X mempunyai nilai suku ke 1 sebesar 585 dengan pembeda -5, sedangkan baris hitung Y mempunyai nilai suku ke 1 sebesar 150 dengan pembeda 10.
   a. Pada suku keberapa kedua baris mempunyai nilai sama?
   b. Berapakah nilai suku yang sama tersebut?
3. Deret hitung X mempunyai nilai suku 1 sebesar 1 600 dan pembeda 0.125. sedangkan deret hitung Y mempunyai nilai suku 1 sebesar 50 dengan pembeda 4.
   a. Pada suku ke berapa deret X dan Y mempunyai nilai sama
   b. Berapakah nilai suku yang sama tersebut

C. Penerapan Deret Hitung (Aritmatika) dalam Ekonomi dan bisnis

C.1. Teori Perkembangan Usaha

Deret hitung dapat diterapkan dalam model perkembangan usaha. Jika variabel-variabel dalam kegiatan usaha seperti produksi, pendapatan, biaya, atau penambahan modal berubah dari satu periode ke periode berikutnya mengikuti pola perubahan seperti hitung maka prinsip-prinsip deret hitung dapat digunakan.

S_n = a + (n – 1)b

b =

a =

n =

Contoh soal 1:

Sebuah penerbitan majalah berita, pada tahun ke 5 memproduksi 30.000 eksemplar, namun produksinya secara konstan terus menurun sehingga pada tahun ke 15 hanya memproduksi 10.000 eksemplar. Dari informasi tersebut, tentukan:

a. berapa penurunan produksi majalah pertahun

b. berapa eksemplar majalah selama operasi perusahaan

a. Sn : a + (n – 1)b..............S_5 = a + 4b = 30.000

S_{15} = a + 14b = 10 000

$$\begin{aligned} a + 4b &= 30.000 \\ \underline{a + 14b} &\underline{= 10.000} \; - \\ -10b &= 20.000 \\ b &= -2.000 \end{aligned}$$

a + 4b = 30.000

$$\begin{aligned} a + 4(-2.000) &= 30.000 \\ a - 8000 &= 30.000 \\ a &= 38.000 \end{aligned}$$

b. Jn : n.a $+ \frac{n}{2}$ (n – 1) b

J_{15} : 15 (38.000) + 15/2 (14) . (-2000)

: 570.000 + 7,5 (-28.000)

: 570.000 – 210.000

: 360.000

Contoh soal 2.

PT Z merupakan perusahaan yang memproduksi sepatu. Pada bulan Januari perusahaan menghasilkan 15.000 buah sepatu. Karena permintaan terus meningkat, setiap bulannya perusahaan mampu menambah jumlah produksi sebanyak 400 buah. Jika pertambahan jumlah produksi tersebut setiap bulannya tetap,

1. Berapakah jumlah produksi pada bulan ke-7 di tahun yang sama?
2. Berapa banyak sepatu yang telah dihasilkan dari bulan pertama (Januari) sampai bulan ke-8?

Jawab:

a_7 = $\mathbf{a_1 + (n\text{-}1)b}$

a_7 = a + 6b

a_7 = 15.000 + 6(400)

= 17.400

$\mathbf{S_8 = n/2(a_1 + a_n)}$

=8/2 (15.000 + U_8)

= 4 (15.000 + (15.000 + 7b))

= 4 (30.000 + 7 (400))

= 131.200

Contoh soal 3.

Penerimaan PT Jaya hasil penjualannya Rp 1.2 milyar pada tahun ke 5 dan Rp 1.8 milyar pada tahun ke 7. Apabila perkembangan penerimaan perusahaan tersebut konstan dari tahun ke tahun, berapakah perkembangan penerimaannya per tahun, berapakah penerimaannya pada tahun pertama dan pada tahun keberapa penerimaannya mencapai Rp. 2.7 milyar.

Jawab

S7 = Rp. 1.8 Milyar.........a + 6b = 1.8

S5 = Rp. 1.2 Milyar......... a + 4b = 1,2

2b = 0.6................b = 0.3

Jadi perkembangan penerimannya per-tahun:Rp. 300 juta.

Penerimaan pada tahun pertama =

a + 4b = 1.2.....a + 4 (0.3) = 1.2

a + 1.2 = 1.2

a = 1.2 – 1.2

= 0

Pada tahun pertama perusahaan tersebut belum ada penerimaan. Penerimaan sebesar Rp. 2.2 milyar diterimanya pada tahun ke ke:

Sn = a + (n – 1) b...........2.7 = 0 + (n – 1) 0.3

= 0 + 0.3n – 0.3

3.0 = 0.3 n

n = 10,

penerimaan perusahaan sebesar 2.7 milyar terjadi tahun ke 10.

2. Pabrik rokok “Kurang Garam” menghasilkan 1 juta bungkus rokok pada tahun pertama berdirinya, dan 1,6 juta bungkus rokok pada tahun ke tujuh.

Hitunglah :

a. Bila perkembangan produksinya konstan, berapa tambahan produksinya per tahun?

b. Berapa produksinya pada tahun ke sebelas?
c. Pada tahun ke berapa produksinya 2,5 juta bungkus rokok?
d. Berapa bungkus rokok yang telah dihasilkan sampai dengan tahun ke-16?

Penyelesaian :

Diketahui : $U_1 = a = 1.000.000$

$U_7 = 1.600.000$

$U_1 = 1.000.000$

$U_7 = a + (n - 1)b$

a. $1.600.000 = 1.000.000 + (7 - 1)\ b$

$6\ b = 600.000$

$b = 100.000$

Jadi, tambahan produksinya per tahun adalah 100.000 bungkus.

b. $U_n = a + (n - 1)b$

$U_{11} = 1.000.000 + (11 - 1)\ 100.000$

$= 1.000.000 + (10)\ 100.000$

$= 1.000.000 + 1.000.000$

$= 2.000.000$

Jadi, pada tahun ke-11 jumlah produksinya 2 juta bungkus rokok.

c. $Un = a + (n - 1)\ b$

$2.500.000 = 1.000.000 + (n - 1)\ 100.000$

$1.500.000 = (n - 1)\ 100.000$

$100.000\ (n - 1) = 1.500.000$

$n - 1 = 15$

$n = 16$

Jadi, tahun ke-16 jumlah produksinya 2,5 juta bungkus rokok.

d. $S_{16} = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + U_n\right]$$

$$S_{16} = \frac{16}{2}\left[1.000.000 + 2.500.000\right]$$

$$= 8\ (\ 3.500.000\ )$$

$$= 28.000.000$$

Jadi, jumlah rokok yang diproduksi sampai dengan tahun ke- 16 adalah 28 juta bungkus.

C.2. Bunga Sederhana

Bunga merupakan suatu balas jasa yang dibayarkan bilamana nasabah menggunakan uang. Jumlah uang yang dipinjamkan atau diinvestasikan di bank disebut modal awal atau pinjaman pokok (*principal*),

- Jika meminjam uang dari bank maka membayar bunga kepada pihak bank tersebut
- Jika menginvestasikan uang berupa tabungan atau deposito di bank maka bank akan membayar/memberi bunga.

Bunga dilihat dari satu pihak yang meminjamkan uang/barang

(misalnya bank) merupakan pendapatan, sedang di pihak yang meminjam merupakan biaya. Misalkan investasi “P” dengan suku bunga tahunan i, maka pendapatan bunga pada akhir tahun ke i adalah Pi, Sehingga nilai akumulasi tahun pertama adalah

$$P + Pi$$

Pada akhir tahun kedua adalah P+P (2i)

Pada akhir tahun ketiga adalah P + P (3i)

Demikian seterusnya sampai pada akhir tahun ke n nilai akumulasinya adalah P+P (n.i). Jadi pendapatan hanya diperoleh dari modal awal saja setiap akhir tahun. Nilai dari pendapatan bunga ini tetap setiap tahunnya. Pendapatan bunga menurut metode ini dinamakan “bunga sederhana” dan dapat dinyatakan dengan rumus berikut:

$$\mathbf{I = P.i.n}$$

Dengan I = Jumlah pendapatan bunga

P = Pinjaman pokok atau jumlah investasi

i = tingkat bunga tahunan

n = jumlah tahun

Kemudian, untuk memperoleh nilai dari modal awal pada akhir periode ke n (F_n) yang terakumulasi di masa depan pada akhir tahun ke-n yang biasanya dilambangkan dengan Fn diperoleh dari modal awal (P) ditambah semua pendapatan bunga selama periode waktu (n). Hal ini dapat di tulis dengan rumus

$$\mathbf{F_n = P + P.i.n}$$
$$\mathbf{= P\{1+(i.n)\}}$$

Contoh soal 1

Hitunglah pendapatan bunga sederhana dan berapa nilai yang terakumulasi di masa datang dari jumlah uang sebesar

Rp. 12.000.000 yang di investasikan di Bank selama 4 tahun dengan bunga 15% per tahun

Jawab

Diketahui:

P = Rp. 12.000.000;

n = 4;

I = 0.15

I = P.i.n

I = Rp. 12.000.000 (4) (0.15) = Rp. 7.200.000

Nilai yang terakumulasi di masa datang pada tahun ke-4 adalah

F_n = P + Pin

= Rp. 12.000.000 + 7.200.000

= Rp. 19.200.000

C.3. Potongan Sederhana (*Simple discount*)

Apabila nilai dari masa depan (Fn), tingkat bunga (i) dan jumlah tahun (n) telah diketahui, maka rumus untuk memperoleh nilai sekarang (P) adalah sebagai berikut:

P = Fn/(1 + i.n)

Dimana: P = Nilai sekarang

Fn = Nilai masa depan tahun ke-n

i = Tingkat bunga

n = Jumlah tahun

Contoh soal :

Lisa ingin mengetahui berapa banyak nilai uang yang harus di investasikan di bank saat ini, jika tingkat bunga di bank pertahun 15% (bukan bunga majemuk) supaya pada akhir tahun ke-5 nilai uangnya menjadi Rp. 20,000,000?

Penyelesaian :

Diketahui F5 = Rp. 20.000.000; i = 0,15 per tahun; n = 5

P = Fn/(1+in)
= 20,000,000/[1+(0,15)(5)]
= 20,000,000/(1+0,75)
= Rp. 11.428.571,429

Dengan demikian, Rp. 11.428.571,429 harus diinvestasikan agar bisa mencapai Rp. 20.000.000 pada akhir tahun kelima.

V. ANALISA DERET UKUR (GEOMETRIK) DAN PENERAPANNYA DALAM BIDANG EKONOMI DAN BISNIS

A. Deret Ukur (Deret Geometrik)

Barisan geometri merupakan barisan yang memenuhi sifat hasil bagi sebuah suku dengan suku sebelumnya yang berurutan, baris yang nilai setiap sukunya didapatkan dari suku sebelumnya melalui perkalian dengan suatu bilangan. Perbandingan atau rasio antara nilai suku dengan nilai suku sebelumnya yang berdekatan selalu sama yaitu r. Sehingga:

$$\frac{Un}{U_{(n-1)}} = r$$

.Deret ukur merupakan deret yang suku-sukunya memiliki pengganda (perbandingan) yang sama (jika dibandingkan dengan suku sebelumnya secara beruturan). Jadi, jika deret hitung dibentuk melalui pertambahan selisih suku yang berurutan maka deret ukur dibentuk melalui perkalian terhadap perbandingan suku. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh deret ukur di bawah ini.

{3, 9, 27, 81, 243, 729} ———> pembanding = 3

{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256} —–> pembanding = 2

Untuk mengetahui nilai suku ke-n dari suatu barisan geometri dapat diketahui dengan mengetahui nilai suku ke-k dan rasio antar suku yang berdekatan (r). Rumusannya berikut ini:

$$\mathbf{Un = U_k \, . \, r^{(n-k)}}$$

Jika yang diketahui adalah nilai suku pertama $U_k = a$ dan rasio antar sukunya (r), maka nilai k = 1 dan nilai U_n adalah:

$$\mathbf{Un = a \, . \, r^{(n-1)}}$$

A.1. Nilai Dari Suku Ke-n (Un)

Jumlah nilai dari suku pertama sampai dengan suku tertentu dalam deret ukur dapat hitung juga menggunakan sebuah rumus. Deret geometri adalah penjumlahan suku-suku dari suatu barisan geometri. Penjumlahan dari suku suku petama sampai suku ke-n barisan geometri dapat dihitung sebagai:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \text{.........} + U_{(n-1)} + U_n$$

Atau sebagai:

Sn = a + ar + ar2 + ar3 + ...ar (n-2) + ar(n-1)

Perhatikan uraian di bawah ini.

$S_n = a + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots\ldots\ldots + a_n$

$S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots\ldots. + ar^{(n-1)}$ ——> (Pers. 1)

Jika persamaan 1 di atas dikalikan dengan pengganda (r), maka:

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + . \ldots + ar^{(n-1)} + ar^n$ ——-> (Pers. 2)

Dengan mengurangkan persamaan 1 terhadap persamaan 2, akan memperoleh rumus untuk menghitung jumlah nilai deret hitung sampai suku tertentu.

$S_n - rS_n = a - ar^n$

$S_n (1 - r) = a (1 - r^n)$

$$\boldsymbol{S_n = (a(1 - r^n))/(1 - r)}$$

Untuk mempermudah perhitungan, jika $r < 1$ maka rumus yang digunakan merupakan rumus yang di atas. Namun jika $r > 1$ maka rumus yang digunakan merupakan:

$$\mathbf{S_n = a(r^n - 1)/(r - 1)}$$

Persamaan tersebut bisa dibalik untuk mencari nilai suku ke-n. Cara memperolehnya sama dengan deret aritmatika yaitu:

$$\mathbf{U_n = S_n - S_{(n-1)}}$$

Jika hendak membuat sebuah baris geometri dengan telah diketahui nilai suku pertama (a) dan suku terakhirnya (p), dapat disisipkan sejumlah bilangan diantara keduan bilangan tersebut. Sejumlah bilangan (q buah) tersebut menjadi suku-suku baris geometri dan memiliki rasio antar suku beredekatan (r). Baris tersebut memiliki banyak suku ke (q + 2) dan diurutkan menjadi:

a, ar, ar^2, ar^3,......,ar^q, $ar^{(q+1)}$. Dimana suku terakhir tersebut: $ar^{(q+1)} = p$

Sehingga nilai r dapat ditentukan sebagai:

$$\mathbf{r} = \sqrt[q+1]{\frac{P}{n}}$$

Contoh Soal 1.

Tentukan nilai suku ke 10 (n_{10}) dan jumlah 10 suku (S_{10}) dari dari deret {3, 9, 27, 81, 243, 729}

Jawab

$a_n = a \times r^{(n-1)}$

$a_{10} = a \times r^{(10-1)}$

$= 3 \times 3^{(9)}$

$= 3 \times 19.683$

$= 59.049$

$S_n = a(r^n - 1)/(r - 1)$

$S10 = (3\ (3^{10}-1))/(3-1)$

$= 3\ (59049-1)/(2)$

$= 177144/2$

$= 88572$

Contoh soal 2

Jika jumlah 2 suku pertama deret geometri adalah 6 dan jumlah 4 suku pertama adalah 54. Memiliki rasio positif. Maka tentukan jumlah 6 suku pertama deret tersebut!

Pembahasan:

Diketahui bahwa: $S_2 = 6$...... $6 = a\ \frac{1-r^2}{1-r} = a\ \frac{(1-r)(1+r)}{1-r} = a\ (1 + r)$

Dan S4 = 54........... $54 = a\ (1+ r)(1 + r^2$

Jika kedua persamaan tersebut disubstitusikan, akan diperoleh:

$54 = a\ (1 + r)(1 + r^2)$

$54 = 6\ (1 + r^2)$

$9 = (1 + r^2)$

$r = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ dan $6 = a\,(1 + r) = a\,(1 + 2\sqrt{2})$

$$a = \frac{6}{1+ 2\sqrt{2}}$$

Sehingga :

$$Sn = a\left(\frac{(1- r^{n})}{(1-r)}\right) = \left(\frac{6}{1+ 2\sqrt{2}}\right)\left\{\frac{\left(1- 2\sqrt{2}^{6}\right)}{1+ 2\sqrt{2}}\right\}$$

$$Sn = 6\left(\frac{(1- 8^{3})}{(1-8)}\right) = \left(\frac{3066}{7}\right)$$

B. Penerapan Deret Ukur Dalam Ekonomi dan bisnis

B.1. Teori nilai uang (bunga majemuk)

Perluasan deret ukur digunakan pada masalah bunga berbunga, pinjam meminjam serta masalah investasi yang dihubungkan dengan tingkat suku bunga dalam jangka waktu tertentu yang besarnya diasumsikan tetap dari waktu ke waktu. Dengan bunga majemuk ini, tingkat bunga yang harus dibayar selain dikenakan pada pokok pinjaman juga dikenakan pada bunga yang dihasilkan pada periode yang bersangkutan. Misalkan suatu modal sebesar P_0 dibungakan per-satu tahun selama jangka waktu "n" tahun. Tingkat suku bunga r % per-tahun, diasumsikan tetap dari tahun ke tahun selama "n" tahun. Sehingga menghitung modal awal tahun ke-n yang diperoleh melalui pembungaan setiap tahun dirumuskan:

$\mathbf{P_n = P_o(1 + r)^n}$, atau $\mathbf{P_n = P_o\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n.m}}$

P_n = Modal pada tahun ke-n (di masa yang akan datang)

P_o = Modal saat sekarang, saat $t = 0$

r = Tingkat suku bunga per-tahun

Model bunga majemuk (*compound interest*) dalam konsep *Time value of money* (TVM) merupakan aplikasi dari deret ukur. Mencari nilai tertentu dari suatu mata uang yang akan diterima di masa depan (*future value*) dari sejumlah uang yang saat ini dipegang (*present value*) dengan tingkat bunga tertentu yang berlaku merupakan penerapan dari prinsip-prinsip deret ukur. Jika penghasilan bunga setiap tahunnya ikut mengendap dalam investasi tersebut. F*uture value* dengan FV, *present value* dengan PV, dan tingkat bunga dengan i (huruf kecil). Jumlah yang diterima setiap tahunnya dapat diuraikan sebagai berikut:

Tahun 1: $FV_1 = PV + PVi = PV(1+i)$

Tahun 2: $FV_2 = (PV(1+i) + PV(1+i)(i)) = PV(1+i)(1+i) = PV(1+i)^2$

Tahun 3:

$FV_3 = PV(1+i)(1+i)+(PV(1+i)(1+i))(i) = PV(1+i)(1+i)(1+i)$

$= PV(1+i)^3$

Dengan demikian:

$$\boldsymbol{FVn = PV(1+i)^n}$$

dengan

FV = nilai mata uang pada waktu mendatang

PV = nilai mata uang pada saat ini

n = jangka waktu

i = Tingkat bunga

Pada rumus di atas, PV identik dengan a (suku pertama), $(1+i)^n$ identik dengan r^{n-1} dalam deret ukur. Misalkan saat ini memiliki uang sebesar Rp 1.000.000, uang tersebut kemudian investasikan dalam suatu surat berharga selama 5 tahun dengan tingkat bunga tabungan per tahun 10%, Berapakah jumlah yang diterima 5 tahun mendatang?

$FV_n = PV(1+i)^n$

$FV_5 = PV(1+i)^5$

$= 1.000.000(1+0,1)^5$

$= \text{Rp } 1.610\ 510$

Jadi nilai dari Rp 1.000.000 di 5 tahun mendatang yang akan diterima dengan tingkat bunga 10% merupakan Rp 1.610.510. Dalam bisnis dan keuangan, $(1+i)^n$ dikenal dengan istilah faktor diskonto (*discounted factor*).

Contoh soal 1.

Jika Bapak James mendepositokan uangnya di Bank sebesar Rp. 80.000.000 dengan tingkat bunga yang belaku 12 % per tahun dimajemukkan, berapa nilai total deposito Bapak James pada akhir tahun ke 3?

Penyelesaian :

Diketahui P = Rp. 80.000.000; i=0.12 per tahun n=3

$F_n = P(1+i)^n$

$F_3 = \text{Rp. } 80.000.000\ (1+0.12)^3$

$= \text{Rp } 80.000.000(1,12)^3$

$= \text{Rp. } 112.394.240$

Contoh soal

Seorang nasabah meminjam uang di bank sebanyak Rp. 50 juta untuk jangka waktu 3 tahun, dengan tingkat bunga 12 % per tahun. Berapa jumlah seluruh uang yang harus dikembalikan pada saat pelunasan? Seandainya perhitungan pembayaran bunga bukan tiap tahun, melainkan tiap semester, berapa jumlah yang harus ia kembalikan?

Jawab: $P = 50.000.000$ $n = 3$ $i = 12\ \% = 0{,}12$

$F_n = P\ (1 + i)^{n}$

$F_3 = 50.000.000\ (1+0{,}12)^3$.........

$F_3 = 50.000.000\ (1{,}4049)$…... $F_3 = 70.246.400$

Jadi pada saat pelunasan, setelah 3 tahun, nasabah tadi secara keseluruhan harus mengembalikan Rp. 70.246.400 Seandainya bunga diperhitungkan dibayar tiap semester, m=2 , maka: $F_n = P\ (1 + i/m)^{m.n}$

$F_3 = 50.000.000\ (1 + 0{,}06)^{3.2}$....$F_3 = 50.000.000\ (1{,}06)^6$

$= 50.000.000\ (1{,}4185)$

$= 70.925.955$

Jumlah kumulatif yang harus dikembalikan menjadi lebih besar Rp. 679,555.

Contoh 3.

Seorang nasabah merencanakan mendepositokan uangnya di Bank sebanyak Rp. 10 juta dalam jangka waktu 5 tahun. Pembungaan depositonya dengan tingkat bunga diasumsikan konstan sebesar 11% pertahun, tentukan:

1. Berapa jumlah uang yang diterimanya pada akhir tahun ke-5 jika didepositokan dengan pembungaan tiap 6 bulan sekali ?
2. Berapa jumlah uang yang diterimanya jika didepositokan dengan pembungaan tiap tiga bulan

Jawab:

1. jumlah uang dengan pembungaan tiap 6 bulan sekali

$P_n = P_0\ (1 + r/m)^{n.m}$

$= 10.000.000\ (1 + 0{,}11/2)^{5.2}$
$= 10.000.000\ (1 + 0{,}055)^{10}$
$= 10.000.000\ (1{,}708.144)$
$= 17.081.444$

Jadi dalam waktu lima tahun uang nasabah tersebut yang dibungakan setiap enam bulan sekali menjadi Rp. 17.081.444

2. Jumlah uang dengan pembungaan tiap 3 bulan sekali

$P_n = P_0\ (1 + r/m)^{n.m}$
$= 10.000.000\ (1 + 0{,}11/4)^{5.4}$
$= 10.000.000\ (1 + 0{,}0275)^{20}$
$= 10.000.000\ (1{,}720428431)$
$= 17.204.284$

Jadi dalam waktu 5 tahun uang nasabah tersebut yang dibungakan setiap 6 bulan sekali menjadi Rp. 17.204.284

D.2. Model Perkembangan Usaha

Jika perkembangan variabel-variabel tertentu dalam kegiatan usaha, factor produksi, biaya, pendapatan, penggunaan tenaga atau penanaman modal, berpola seperti deret hitung maka prinsip-prinsip deret hitung digunakan untuk menganalisis perkembangan variabel tersebut. Berpola deret hitung maksudnya adalah variabel bersangkutan bertambah secara konstan dari satu periode ke periode berikutnya.

Contoh soal:

Besarnya penerimaan PT. YSSY dari hasil penjualan barangnya Rp 720 juta pada tahun ke 5 dan Rp 980 juta pada tahun 7. Bila perkembangan penerimaan penjualan tersebut berpola seperti deret hitung, tentukan:

a. Berapa perkembangan penerimaannya per tahun?
b. Berapa besar penerimaan pada tahun pertama"
c. Pada tahun keberapa penerimaannya sebesar Rp 460 juta?

Jawab : $U_n = a + (n - 1)\ b$

$720 = a + (5\text{-}1)b$................ $720 = \cancel{a} + 4b$

$980 = a + (7\text{-}1)b$................ $\underline{980 = a + (6b)}$ _

$-260 = -2b$

$\mathbf{130 = b}$

Jadi, besar penerimaan pertahun adalah Rp.130.000.000.

$Un = a + (n - 1)\ b$

$720 = a + (5 - 1)b$.......... $720 = a + 4 \times 130$

$720 = a + 520$

$a = \mathbf{200}$

Jadi, besar penerimaan pada tahun-1 adalah Rp.200.000.000

$Un = a + (n - 1)\ b$.......... $\mathbf{4}60 = 200 + (n - 1)\ 130$

$460 = 200 + 130n - 130$

$n = (460\text{-}70) : 130$

$\mathbf{n = 3}$

Jadi, penerimaan sebesar Rp 460 juta terjadi tahun ke-3.

D.3. Model Pertumbuhan Penduduk

Penerapan deret ukur dalam ekonomi dan bisnis yang paling konvesional salah satunya merupakan model pertumbuhan penduduk pada suatu waktu. Rata-rata pertumbuhan penduduk penduduk suatu daerah tertentu untuk periode waktu tertentu jika jumlah penduduknya diketahui dari waktu ke waktu dapat digunakan rumus:

$$i = \sqrt[n]{R1.R2.R3.R4\ldots\ldots\ldots Rn}$$

dengan:

i = rata-rata (perentase) pertumbuhan penduduk per tahun

R= pertumbuhan penduduk pada tahun ke-i terhadap tahun sebelumnya i-1, i = 1, 2, ...n

Seorang ekonom bernama Thomas R Malthus menyatakan bahwa jumlah penduduk di dunia mengikuti pola deret ukur. Rumusannya sebagai berikut:

$$Pt = P_0 (1 + i)^n$$

Dengan Pt = jumlah penduduk pada tahun ke-t

P_0 = jumlah penduduk tahun pertama (tahun dasar)

i = persentase pertumbuhan penduduk

n = indeks waktu (periode jumlah waktu)

Contoh soal 1.

1. Di suatu daerah, tercatat jumlah penduduknya tahun 2007-2010

Tahun	2007	2008	2009	2010
Σ penduduk	257 635	274 882	297 347	292 516

Berapakah rata-rata pertumbuhan penduduk per tahun untuk tahun 2007-2010?

Jawab:

Pertumbuhan 2008 (terhadap 2007) $R_{2008} = \frac{274882}{257635} = 1.06$

Pertumbuhan 2009 (terhadap 2008) $R_{2009} = \frac{297347}{274882} = 1.08$

Pertumbuhan 2010 (terhadap 2009) $R_{2010} = \frac{292516}{297347} = 0.98$

Dengan demikian rata-rata pertumbuhan penduduk pertahun untuk tahun 2007-2010;

$i = \sqrt[3]{(1.06)(1.08)(0.98)}$

$i = 1.039$

Contoh soal 2.

Tahun 1991 Penduduk Kota Banjarmasin berjumlah 1 juta jiwa, tingkat pertumbuhannya 4% per tahun. Hitunglah jumlah penduduknya tahun 2006. jika mulai tahun 2006 pertumbuhannya menurun menjadi 2,5%, berapa jumlah penduduknya 11 tahun kemudian?

Jawab :

P tahun 2006/P_{16}

$P_n = P_1 R^{n-1}$................P_{16} = 1 juta $(1{,}04)^{15}$

P_{16} = 1 juta (1,800943)

P_{16} = 1.800.943 jiwa

Pada tahun 2006 penduduk Kota Banjarmasin adalah 1.800.943 jiwa. Pada Tahun 2006 pertumbuhan menurun 2.5 %, berapa jumlah penduduk 11 tahun kemudian?

Jawab :

P_{11} tahun kemudian/P_{11}

$Pn = Pi\ R^{\,n-1}$....................$P_{11} = 1.800.943(1,025)^{10}$

$P_{11} = 2.305.359$ jiwa

Maka, 11 tahun kemudian penduduk Kota Banjarmasin menjadi 2.305.359 jiwa.

Contoh soal 3.

Penduduk provinsi kalimantan timur tahun 2008 tercatat 3.25 juta jiwa, diperkirakan tahun 2013 menjadi 4,5 juta jiwa. Jika tahun 2008 dianggap sebagai tahun dasar, berapa % pertumbuhannya? Berapa jumlah penduduknya pada tahun 2015.

Jawab: $\boldsymbol{Pt = P_0\ (1 + i)^n}$................$4,5 = 3,25\ (1 + i)^{2013\text{-}2008}$

$4,5 = 3,25\ (1 + i)^5$

$4,5/3,25 = (1\text{-}i)^5$

$1,3846 = (1 + i)^5$

$\sqrt[5]{1,3846} = 1 + i$

$i = \sqrt[5]{1,3846} - 1$

$= 0,0673$ atau $6,73\%$

Jadi pertambahan penduduknya 6,73%, sehingga jumlah penduduknya pada tahun 2015, adalah

$\boldsymbol{Pt = P_0\ (1 + i)^n}$................. $P_{2015} = P_{1998}\ (1 + i)^{2015\text{-}2008}$

$P_{2015} = P_{1998}\ (1 + i)^7$

$= 3,25\ (1 + 0.0673)^7$

$= 5,13$ juta jiwa

Pertumbuhan penduduk di suatu daerah tertentu selama periode waktu "n" jika jumlah penduduk yang diketahui hanyalah penduduk pada tahun dasar (t = 0) dan jumlah penduduk pada tahun ke-n dihitung dengan rumus

$$i = \left\{ \sqrt{\frac{Pn}{Po}} \right\} - 1$$

dengan: i = persentase pertumbuhan penduduk per tahun

P_0 = jumlah penduduk pada tahun dasar

Pn = jumlah penduduk pada tahun ke-n

n = periode waktu

Latihan Soal

1. Seorang karyawan berhutang pada koperasi sebesar Rp 20 juta. Dia menyetujui untuk membayar hutangnya setiap 3 bulan sebesar Rp 2 juta ditambah dengan pembayaran bunga sebesar 4.5% dari sisa hutangnya, Berapa jumlah total bunga yang dibayarkannya? Berapa jumlah total hutangnya?
2. Hitunglah tingkat suku bunga per tahun yang berlaku untuk suatu modal yang selama 7 tahun dibungakan setiap tahun ternyata berlipat ganda menjadi 4 kali modal awal.
3. Jumlah penduduk kota Banjarmasin tahun 2007 sebesar 1.256.448 jiwa. Pertumbuhan penduduknya diketahui per tahun rata-rata 11,23%. Berapakah jumlah penduduknya pada tahun 2012?
4. Dari hasil sensus penduduk, diketahui pertumbuhan penduduk kota Balikpapan se bagai berikut:

Tahun	Pertumbuhan*
2006	+ 2,1%
2007	+ 1,3%
2008	- 1,0%
2009	+ 1,5%

2010	+ 1,0%

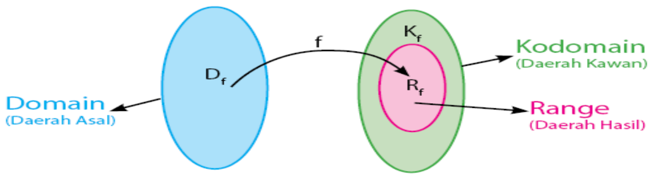
Berapakah rata-rata pertumbuhan penduduk (%)

V. RELASI, FUNGSI DAN MODEL

Matematika berkaitan dengan sesuatu yang dapat dihitung atau sesuatu yang dinyatakan dalam bentuk kuantitas (jumlah). Banyak sekali variabel-vaariabel (konsep) ekonomi dan bisnis yang dikuantitatifkan, seperti harga barang, jumlah barang yang diminta dan ditawarkan, jumlah uang beredar, tingkat margin bagi hasil, pendapatan nasional, tingkat investasi, dan sebagainya. Matematika tidak hanya berperan dalam menguantitatifkan variabel-variabel ekonomi dan bisnis, tetapi juga menggali hubungan antara variabel-variabel ekonomi dan bisnis. Hubungan suatu variabel ekonomi dan bisnis dengan variabel-variabel ekonomi dan bisnis yang lain sering dinyatakan dalam bentuk model ekonomi dan bisnis. Oleh karena variabel-variabel ekonomi dan bisnis tersebu dapat dikuantitatifkan, model ekonomi dan bisnis tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk simbol/model matematika. Sebuah model ekonomi dan bisnis merupakan penyederhanaan bentuk hubungan antarvariabel ekonomi dan bisnis dari dunia nyata. Dalam konteks matematika ekonomi dan bisnis, model ekonomi dan bisnis merupakan himpunan matematik antarvariabel-variabel ekonomi dan bisnis.

A. Definisi

Secara sederhana, relasi dapat diartikan sebagai hubungan, yaitu hubungan antara daerah asal (*domain*), daerah kawan (*kodomain*), dan daerah hasil *(range*). Sedangkan fungsi merupakan relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan daerah asal tepat satu ke himpunan daerah kawannya. Perbedaan antara relasi dan fungsi terletak pada cara memasangkan anggota himpunan ke daerah asalnya.



Pada relasi, tidak ada aturan khusus untuk memasangkan setiap anggota himpunan daerah asal ke daerah kawan. Aturan hanya terikat atas pernyataan relasi tersebut. Setiap anggota himpunan daerah asal boleh mempunyai pasangan lebih dari satu atau boleh juga tidak memiliki pasangan. Sedangkan pada fungsi, setiap anggota himpunan daerah asal dipasangkan dengan aturan khusus. Aturan tersebut mengharuskan setiap anggota himpunan daerah asal mempunyai pasangan dan hanya tepat satu dipasangkan dengan daerah kawannya.

B. Relasi

Seperti yang telah dijelaskan secara singkat di atas, relasi dapat diartikan sebagai hubungan. Misalkan sebuah relasi menyatakan hubungan perkalian. Hasil relasi tersebut dapat dinyatakan dalam himpunan pasangan terurut x dan y dan dapat juga digambar pada bidang kartesius. Istilah Cartesius digunakan untuk mengenang ahli matematika sekaligus filsuf dari Perancis bernama Descartes. Beliau memiliki peranan yang sangat besar dalam menggabungkan aljabar dan geometri (Cartesius adalah latinisasi untuk Descartes). Awal dari pemikiran dasar pemakaian sistem ini dikembangkan di tahun 1637 dalam dua tulisan dari karya Descartes.

Dalam karyanya "*Discourse on Method*", Descartes memperkenalkan saran baru guna menunjukan keadaan atau posisi titik dari suatu obyek pada sebuah permukaan. Cara atau metode tersebut dengan memafaatkan dua sumbu yang saling tegak lurus antar satu dengan yang lain. Dalam karya selanjutnya, *La Géométrie*, Descartes juga memperdalam konsep-konsep yang sudah dikembangkannya. Relasi antara dua himpunan dapat dinyatakan dengan diagram panah, diagram cartesius dan himpunan pasangan berurutan.

Contoh 1:

Empat orang anak yaitu Tias, Jamal, Farid, dan Dika memilih permainan yang mereka gemari. Ternyata:

Tias, Jamal, dan Farid memilih permainan voli.

Jamal dan Farid memilih permainan basket.

Farid dan Dika memilih permainan tenis.

Jika himpunan A= {Tias, Jamal, Farid, Dika} dan himpunan B= {voli, basket, tenis}. Terdapat relasi gemar bermain dari himpunan A ke himpunan B.

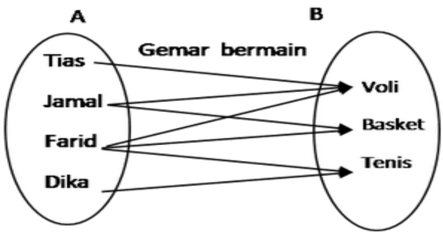
a. Nyatakan dengan diagram panah,

b. Nyatakan dengan diagram cartesius

c. Nyatakan dengan himpunan pasangan berurutan.

Jawab :

a. Diagram Panah



b. Pasangan berurutan

Himpunan pasangan berurutan yang dapat dinyatakan sebagai simbol sebagai berikut: H x K = {(1,1), (1,5), (2,3), (4,1)}

Contoh 2.

Cara menyatakan hasil relasi perkalian antara himpunan A dan B dapat dilihat pada contoh permasalahan di bawah

A = {1, 2, 3}

B = {2, 3}

A x B = {(1,2), (2,4), (3,6), (1,6), (2,6), (3,9)}

Secara umum relasi dapat ditulis:

Z = [(x,y) l x Є X dan y Є Y]

x : unsur pertama pasangan urut (absis)

y : unsur kedua pasangan urut (ordinat).

X : Himpunan dari seluruh unsur pertama (*Domain*/ absis)

Y : Himpunan dari seluruh unsur kedua (*Range*/ ordinat).

Contoh dari Relasi :

Z = [(x,y) l $y \leq x$; x =1 dan $-3 \leq y \leq 1$]

Fungsinya adalah $y \leq x$

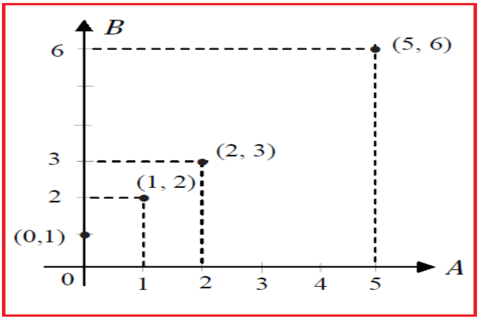
Daerah himpunan x : x=1 anggota x(1)

Daerah himpunan y : $-3 \leq y \leq 1$anggota y (-3,-2,-1,0,1)

Relasinya, Z=[(1,-3),(1,-2), (1,-1), (1,0), (1,1)]

c. Grafik Cartesius

Suatu grafik relasi dan fungsi sangat erat kaitannya dengan diagram cartesius, karena suatu grafik fungsi (pemetaan) adalah suatu bentuk diagram Cartesius dari suatu fungsi (pemetaan).



Gambar 4. Grafik Cartesius

Sifat-sifat relasi

1. Reflektif; relasi R pada himpunan A dikatakan bersifat reflektif, jika a ε A maka (a,a) ε R atau a R a.
2. Simetris; relasi R dikatakan bersifat simetris, jika (a,b)ε R maka (b,a) ε R atau jika a R b maka b R a.
3. Transitif; relasi R dikatakan bersifat transitif, jika (a,b)ε R maka (b,c) ε R maka(a,c) ε R atau jika a R b dan b R c maka c R c.
4. Ekiuvalen; relasi ekuivalen adalah relasi yang mempunyai sifat reflektif, simetrik, dan transitif.

C. Fungsi :

Penerapan fungsi dalam ekonomi dan bisnis dan bisnis merupakan salah satu bagian yang sangat penting untuk dipelajari, karena model-model ekonomi dan bisnis yang berbentuk matematika biasanya dinyatakan dengan fungsi. Fungsi dalam matematika menyatakan suatu hubungan formal di antara dua himpunan data. Jika himpunan data tersebut merupakan variabel, maka fungsi dapat dikatakan sebagai hubungan antara dua variabel. Pengertian fungsi sangat penting dalam matematika, lebih-lebih dalam Matematika Ekonomi dan bisnis. Kenapa fungsi sangat penting dalam Matematika Ekonomi dan bisnis? Hampir semua masalah ekonomi dan bisnis dapat dinyatakan dengan matematika dan biasanya dapat dinyatakan dalam fungsi. Misalnya: fungsi permintaan, fungsi penawaran, fungsi ongkos, fungsi konsumsi, dan lain sebagainya.

Fungsi merupakan hubungan matematis antara suatu variabel dengan variabel lainnya. Unsur-unsur pembentuk fungsi adalah; variabel, koefisien, dan konstanta atau parameter. Dalam menulis notasi fungsi, perlu diperhatikan kedudukan antar variabel dalam fungsi tersebut. Pada umumnya kedudukan variabel bebas dinotasikan dengan "x" dan notasi variabel tidak bebas dengan "y". Penulisan fungsi yang menyatakan hubungan antar dua variabel tersebut di atas adalah: **y = f (x),** dibaca y adalah fungsi dari x.Penulisan Fungsi dapat dilakukan secara implisit maupun eksplisit, penulisan fungsi $y = f(x)$, atau $x = g(y)$ merupakan bentuk penulisan fungsi secara eksplisit, karena kedudukan variabel dalam persamaan fungsi sebagai variabel bebas (*independent variabel*) dan variabel tidak bebas (*dependent variabel*) telah jelas.

Fungsi dapat ditulis dengan berbagai cara, misal fungsi f yang wilayah (*domain*) dan daerah hasil (*range*) adalah himpunan bagian dari bilangan riil dan kaedahnya ditentukan oleh persamaan $y = x^3 + 5$, dapat ditulis dengan salah satu cara-cara berikut:

1. $y = x^3 + 5$
2. $f(x) = x^3 + 5$
3. $f : (x, y)$ merupakan fungsi pasangan berurut $(x, x^3 + 5)$
4. $f : x = y$ merupakan fungsi yang harganya diberikan $f(x)=x^3+5$
5. $(x,y) ; y = x^3 + 5$

Dari ke-5 cara penulisan fungsi, yang lazim dipakai karena lebih singkat adalah cara (1) dan cara (2). Untuk fungsi f yang dinyatakan sebagai [(x,y)], x dan y disebut perubah/variabel. Himpunan nilai x tersebut berperan sebagai domain. Nilai perubah y yang merupakan bayangan dari nilai x, berperan sebagai range. Sementara x disebut variabel bebas (*independent variabel*), dan y disebut variabel terikat (*dependent variabel*). Ini berarti nilai fungsi [(x,y)] atau $y = f(x)$ ditentukan oleh nilai x.

Berdasarkan letak variabel-variabelnya fungsi dibedakan menjadi dua yaitu fungsi eksplisit dan fungsi implisit. Fungsi eksplisit adalah fungsi yang variabel bebas dan variabel terikatnya terletak di ruas yang berlainan. Fungsi implisit adalah fungsi yang variabel bebas dan variabel terikatnya terletak di ruas yang sama. Bentuk umum dari kedua fungsi tersebut

Fungsi	**Bentuk eksplisit**	**Bentuk implisit**
Umum	$y = f(x)$	$f(x,y) = 0$
Linear	$y = ao + a_1x$	$ao + a_1x - y = 0$

Kuadrat	$y = ao + a_1x + a_2x_2$	$ao + a_1x + a_2x_2 – y = 0$
Kubik	$y = ao + a_1x + a_2x_2 + a_3x_3$	$ao + a_1x + a_2x_2 + a_3x_3 – y= 0$

Bentuk Umum dan sederhana: Y = a + bX.

Y = Variabel terikat

a = konstanta

b = koefisien varian X

X = Variabel bebas

Apabila dilihat banyak sedikitnya variabel maka fungsi itu dapat dinyatakan dalam beberapa kemungkinan, yaitu:

- apabila fungsi hanya mempunyai dua variabel : x dan y saja.
- apabila fungsi mempunyai tiga variabel: x_1 ; x_2 dan y
- apabila fungsi mempunyai banyak variabel.

Kalau membicarakan masalah fungsi maka ada tiga macam faktor yang perlu diketahui, yaitu variabel, bilangan konstan dan koefisien.

a. Variabel merupakan unsur pembentuk suatu fungsi yang mencerminkan atau mewakili faktor (data) tertentu, yang sifatnya tidak tetap dan antara setiap variabel tersebut saling mempengaruhi. Variabel dilambangkan dengan huruf-huruf latin, atau notasi dari variabel ini biasanya dituliskan dengan: x, y dan z. Berdasarkan kedudukan atau sifatnya, di dalam setiap fungsi terdapat dua macam variabel yaitu: variabel bebas (*independent variabel*) dan variabel terikat (*dependent variabel*).

- Variabel bebas merupakan variabel yang nilainya tidak tergantung pada variabel lain, sedangkan
- variabel terikat merupakan variabel yang nilainya tergantung pada variabel lain.

Pada dasarnya variabel ini dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu:

1) Variabel kuantitatif, yaitu variabel yang sifatnya berubah-ubah dan nilainya dapat diukur, misalnya dalam kilogram, meter, rupiah, dan sebagainya.
2) Variabel kualitatif yaitu variabel yang sifatnya tidak tetap dan nilainya dapat diukur, misalnya: rasa, kepuasan, selera, kesenangan dan lain-lain.

b. Konstanta merupakan bilangan atau angka yang seringkali turut membentuk sebuah fungsi tetapi berdiri sendiri sebagai bilangan (tidak terkait pada suatu variabel tertentu). Setiap fungsi tidak harus mempunyai bilangan konstan. Ada atau tidaknya bilangan konstan di dalam matematika ekonomi dan bisnis tergantung masalahnya. Apakah masalah itu terdapat masalah yang nilainya tetap, seperti biaya tetap, harga tetap dan lain sebagainya. Jadi yang dimaksud dengan bilangan konstan merupakan bilangan tetap.

Bilangan konstan ini dapat dibedakan menjadi 2, yaitu:

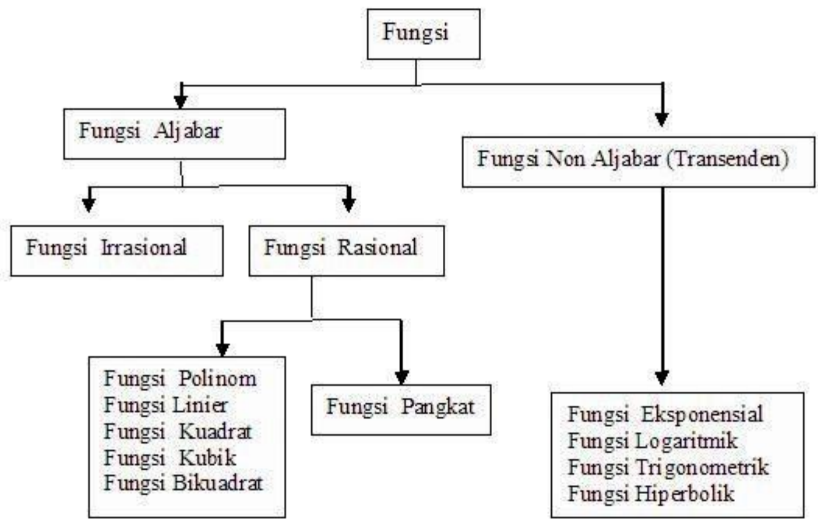
1) Bilangan konstan absolut, yaitu bilangan konstan yang nilainya tetap disetiap fungsi, misalnya: 1,2,3,4, dan seterusnya

2) Bilangan konstan parametris, yaitu bilangan konstan yang nilainya berubah-ubah pada fungsi, biasanya digunakan notasi a, b, c,…...

c. Koefisien merupakan bilangan atau angka konstan yang terletak didepan variabel independen dalam suatu fungsi dan menjadi satu kesatuan. Sedangkan notasi sebuah fungsi secara umum merupakan: y = f(x) misalnya: y = 5 + 0,8x,

y : variabel terikat
x : variabel bebas
0,8 : koefisien variabel x
5 : konstanta

D. Jenis– Jenis Fungsi



1. Fungsi Aljabar

Fungsi aljabar dapat diklasifikasikan menjadi fungsi rasional bulat, fungsi rasional pecahan, dan fungsi irrasional.

a. Fungsi rasional bulat juga disebut fungsi polinom atau fungsi berpangkat banyak, yang ditulis sebagai f(x) = $a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + . . . + a_{n-1}x$ + an, imana n merupakan bilangan bulat non negatif dan a0,a1, a2, . . . merupakan bilangan real tidak sama dengan nol. Misal: Fungsi polinom berderajat tiga: $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x - 1$ yang merupakan fungsi kubik.

   Fungsi polinom berderajat dua: $f(x) = 9x^2 + 3x - 15$ yang merupakan fungsi kuadrat. Fungsi polinom berderajat satu: f(x) = 75x + 150 yang merupakan fungsi linear. 1.2.2.

b. Fungsi rasional pecahan: px qx r ax bx c f(x) 2 2 + + + + = 1.

1. **Fungsi Polinom merupakan** fungsi yang mengandung banyak suku dalam variabel bebasnya, contoh: Y= ao + $a1X^2+a2X^2+...$dst
2. **Fungsi Linear merupakan** Fungsi dimana pangkat tertinggi dari variabel bebasnya merupakan 1. Contoh: Y = 2x + 4
3. **Fungsi Kuadrat merupakan** fungsi dimana pangkat tertingi dari variabel bebasnya merupakan 2. Contoh: $Y = 2x^2 + 4$
4. **Fungsi Kubik merupakan** fungsi dimana pangkat tertinggi dari variabel bebasnya merupakan 3. Contoh: $Y = 2x^3 + 4$

5. **Fungsi Pangkat merupakan** fungsi yang variabel bebasnya berpangkat suatu bilangan riil. Contoh: Y = x^3
6. **Fungsi Eksponen** fungsi yang variabel bebasnya berupa pangkat suatu konstatnta ditulis f(x) = a^X
7. **Fungsi Hiperbola,** fungsi yang variabel bebasnya berpangkal bilangan riel negatif, ditulis f(x) = X^{-n}

c. **Fungsi irrasional**: **merupakan** fungsi yang variabel bebasnya berupa akar ditulis f(x) = $\sqrt{f(x)}$

2. **Fungsi Transenden**

Merupakan fungsi non aljabar, seperti: Fungsi goneometri: f(x) = 2 sin 3x + 12. Fungsi logaritma: f(x) = log3x. Fungsi eksponensal: f(x) = 12x. Fungsi siklometri: f(x) = arc sin x^3. Berdasarkan letak variabelnya, fungsi terdiri dari fungsi eksplisit dan fungsi implisit.

a. **Fungsi eksplisit** merupakan fungsi yang seluruh variabelnya dipisahkan oleh tanda "=" menjadi ruas kiri dan ruas kanan, misalnya y = $8x^2$ + 32

b. **Fungsi implisit** merupakan fungsi yang seluruh variabelnya terletak dalam ruas yang sama, misalnya y - $8x^2$ = 32

b.1. **Fungsi komposisi (*composite function*)** disebut juga sebagai fungsi majemuk, yaitu fungsi yang diperoleh dengan mensubstitusi fungsi lain ke dalamnya.Jika diketahui y = f(x) dan x = g(z) maka fungsi komposisinya merupakan y = f[g(z)] Contoh : Jika f(x) = x^2 - x -1 dan g(x) = x - 1 maka fungsi komposisi f[g(x)] merupakan : $f[g(x)] = [g(x)]^2 - [g(x)] - 1 = (x - 1)^2 - (x - 1) - 1 = x^2 - 3x + 1$

b.2._Fungsi invers diperoleh dengan mempertukarkan domain dan range fungsi asal, jikka fungsi asal merupakan fungsi satu-satu. Jika fungsi asal merupakan $y = f(x)$, maka fungsi inversnya merupakan $x = f^{-1}(y)$ atau $x = f^{-1}[f(x)]$. Contoh: Jika diketahui fungsi asal merupakan $f(x) = 2x - 1$, maka fungsi inversnya merupakan: $y = 2x - 1$; $2x = y + 1$; $x = (y + 1)/2$ $f^{-1}(y) = (y + 1)/2$

D. Model

Dalam suatu perekonomi dan bisnisan, hubungan antara variabel-variabel ekonomi dan bisnis yang satu dengan variabel lainnya sangat komplek. Untuk memudahkan hubungan antar variabel ini, maka cara yang terbaik adalah memilih berbagai variabel ekonomi dan bisnis yang sesuai dengan permasalahan ekonomi dan bisnis tersebut, kemudian menghubungkannya sedemikian rupa sehingga bentuk hubungan antar variabel-variabel ekonomi dan bisnis menjadi sederhana dan relevan dengan keadaan ekonomi dan bisnis yang ada. Teori Ekonomi dan bisnis yang terkait dengan fenomena tersebut, tidak memberikan ukuran kekuatan hubungan secara tegas antara variabel ekonomi dan bisnis. Matematika Ekonomi dan bisnis dapat membantu menyederhanakan hubungan tersebut dalam sebuah model yang disebut dengan “model matematika”.

Model merupakan representasi dari objek atau situasi atau kondisi yang sebenarnya. Model dapat disajikan dalam berbagai bentuk, yang salah satunya model matematika. Penyederhanaan variabel dan hubungan antar variabel-variabel ekonomi dan bisnis disebut model ekonomi dan bisnis. Model ekonomi dan bisnis dapat berbentuk model matematika dan non-matematika. Model ekonomi dan bisnis yang berbentuk matematika terdiri dari satu atau sekumpulan persamaan matematika. Karena model ekonomi dan bisnis merupakan penyederhanaan hubungan antar variabel maka model ekonomi dan bisnis tersebut berupa fungsi.

Model merupakan penyederhanaan akan sesuatu proses yang sebenarnya terjadi atau suatu realitas di lapangan yang sebenarnya kompleks dan rumit. Asumsi-asumsi akan variabel-variabel ekonomi dan bisnis untuk menyederhanakan kenyataan menjadi model ekonomi dan bisnis. Oleh karena itu, sebuah model pasti berbeda dengan yang sesungguhnya dalam hal ukuran, jumlah sebenarnya, tingkat kerumitan, dan tingkat kesempurnaan. Tetapi model bisa menyajikan faktor-faktor yang penting dari keadaan sebenarnya. Sebuah model ekonomi dan bisnis merupakan penyederhanaan bentuk hubungan antar variabel ekonomi dan bisnis dari dunia nyata. Dalam konteks matematika ekonomi dan bisnis, model ekonomi dan bisnis merupakan himpunan matematik antar variabel-variabel ekonomi dan bisnis.

Tujuan dari adanya atau dibentuk sebuah model matematika adalah memungkinkan dilakukan proses pengambilan keputusan mengenai situasi nyata dengan menganalisis model tersebut. Nilai kesimpulan dan keputusan berdasarkan model tergantung pada seberapa baiknya model matematika dapat merepresentasikan kondisi nyatanya. Dengan pengertian bahwa model yang baik membuat keputusan menjadi tidak bias.

Model matematika selalu melibatkan simbol untuk menyatakan suatu besaran bilangan dan angka, maka pemahaman himpunan dan operasinya, sistem bilangan dan operasinya perlu dipahami dengan baik. Model matematika pada umumnya dinyatakan dengan berbagai simbol dan kombinasi antara variabel dan konstanta. Variabel merupakan unsur yang sifatnya berubah-ubah dari satu keadaan ke keadaan lainnya. Koefisien merupakan bilangan atau angka yang diletakkan tepat didepan suatu variabel, dan terkait dengan variabel yang bersangkutan. Konstanta merupakan suatu besaran bilangan atau angka yang sifatnya tetap dan tidak berubah untuk suatu kasus dan tidak terkait dengan suatu variabel. Konstanta atau koefisien yang sifatnya masih umum disebut sebagai parameter, artinya besarannya tetap untuk suatu kasus, tetapi berubah pada kasus lainnya.

Model ekonomi dan bisnis yang berbentuk suatu fungsi sering digunakan oleh para ahli ekonomi dan bisnis dalam memecahkan masalah-masalah ekonomi dan bisnis dalam hal peramalan ataupun pendugaan juga dikarenakan banyak masalah dalam bidang ekonomi dan bisnis dapat disederhanakan menjadi sebuah persamaan matematika yang bisa berbentuk sebuah fungsi linear ataupun non-linear. Fungsi Permintaan dan Fungsi Penawaran adalah bentuk penyederhanaan masalah dalam bidang ekonomi dan bisnis. Penyederhanaan tersebut dinyatakan dalam bentuk model matematika. Salah satu bentuk model matematika adalah sebuah persamaan yang berbentuk fungsi linear.

Model matematika merepresentasikan suatu masalah dengan sistem yang mencerminkan hubungan antar simbol atau hubungan matematis. Sebagai contoh, permintaan sebuah komoditi P, penerimaan dari hasil penjualan produk Q adalah R, biaya total untuk memproduksi Q adalah C, dan laba total dari penjualan Q ditentukan dengan mendapatkan selisih antara penerimaan R dengan total biaya C dari jumlah Q yang yang terjual, maka model matematika yang dapat dibuat adalah:

$P = a + bQ$; a dan b konstanta, (1)

$R = PQ = (a + bQ) Q = aQ + bQ2$ (2)

$C = c + dQ$; c dan d konstanta, (3)

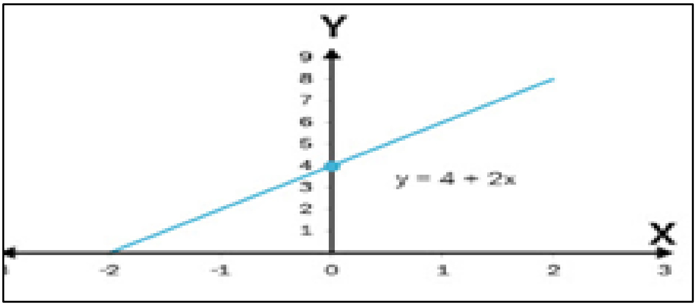
$\pi = R – C$, (4)

Selain model linier sederhana tersebut di atas, masih banyak model matematika lainnya yang mampu mengekspresikan phenomena ekonomi dan bisnis maupun bisnis dalam dunia nyata. Sebagai contoh, model eksponensial dapat mengekspresikan kasus pertumbuhan penduduk, pertumbuhan pendapatan suatu negara, model multivariate dapat mengungkapkan pengaruh berbagai variabel terhadap permintaan dan penawaran sebuah komoditi, model linier programming, model kalkulus differensial yang banyak diaplikasikan dalam menyelesaikan masalah ekonomi dan bisnis dan bisnis yang menyangkut optimalisas. dan model matematika lainnya dengan berbagai manfaatnya.

VI. FUNGSI LINIER DALAM EKONOMI DAN BISNIS

Suatu fungsi disebut fungsi linier apabila fungsi tersebut ditentukan oleh sekelompok bilangan konstan dan grafiknya berupa garis lurus, fungsi linear merupakan fungsi polinom yang variabel bebasnya memiliki pangkat paling tinggi adalah satu: $Y = a_o + a_1X^2$,. Sebuah persamaan linier dapat dibentuk melalui beberapa macam cara tergantung pada data yang tersedia. Berikut dicontohkan 4 macam cara untuk membentuk sebuah persamaan linier, masing-masing berdasarkan ketersediaan data yang diketahui. Keempat cara yang dimaksud merupakan:

a. **Dengan cara sederhana** (*curve traicing process*), yaitu dengan menggunakan tabel x dan y, diawali nilai x sebagai variabel bebas, maka dengan memasukkan beberapa nilai x akan memperoleh nilai y. Misalkan : y = 4 + 2x: menghasilkan garis seperti kurva berikut ini:



b. **Dengan cara matematis** (menggunakan ciri-ciri yang penting), yaitu mencari titik potong untuk sumbu x dan juga sumbu y.

Langkah-langkah membuat grafik fungsi linier dengan cara matematis:

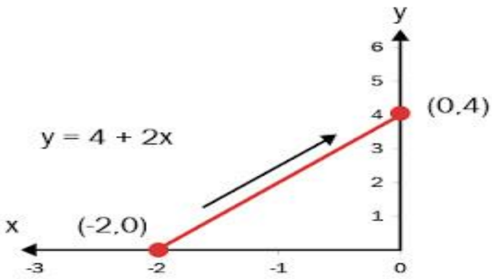
- Tentukan titik potong dengan sumbu x, y = 0 sehingga diperoleh koordinat A(x1, 0)
- Tentukan titik potong dengan sumbu y, x = 0 sehingga diperoleh koordinat B(0, y1)
- hubungkan dua titik A dan B sehingga terbentuk garis lurus.

contoh:

Misalkan diketahui y = 4 + 2x.

- Titik potong fungsi dengan sumbu y, x=0, maka y=4. Jadi titiknya merupakan A(0,4)
- Titik potong fungsi dengan sumbu x, y=0, maka x=-2. Jadi titiknya merupakan B(-2,0)

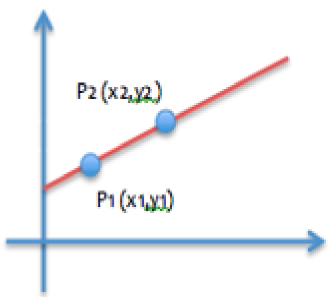
Dengan menggunakan kedua ciri ini maka dapat menggambar grafik fungsi y=4 + 2x seperti terlihat pada gambar berikut:



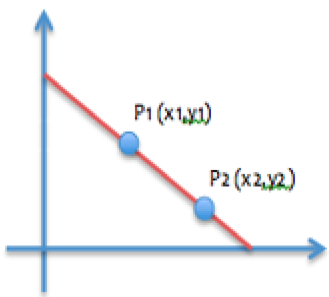
A. Bentuk Kurva Suatu Fungsi

Persamaan linier juga dapat ditulis ditulis dengan simbol y = ax + b (ini untuk mempermudah dalam memahami gambar)

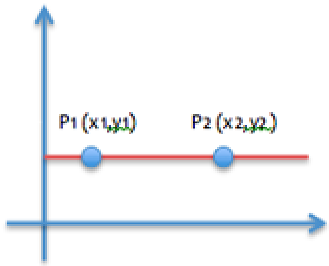
1. Jika b bernilai positif : fungsi linier digambarkan garis dari kiri bawah ke kanan atas
2. Jika b bernilai negatif : fungsi linier digambarkan garis dari kiri atas ke kanan bawah
3. Jika b bernilai nol : digambarkan garis yg sejajar dengan sumbu datar x



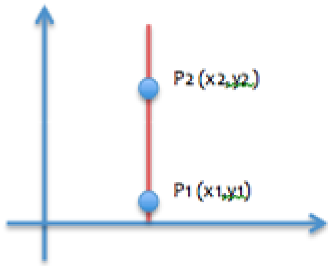
a. Kemiringan positif (slope +)



b. Kemiringan negatif (slope -)



c. Kemiringan nol (slope o)



d. Kemiringan tak tentu

A. Membentuk Fungsi Linier

A.1. Cara koordinat-lereng

Apabila diketahui sebuah titik A dengan koordinat (x_1,y_1) dan lereng garisnya b, maka persamaan liniernya merupakan :

$Y – y1 = b (X – x1)$

Contoh Soal :

Andaikan diketahui bahwa titik A(2,3) dan lereng garisnya merupakan 0,5 maka persamaan linier yang memenuhi kedua persamaan kedua data:

$Y – y1 = b (X – x1)$.........$Y – 3 = 0.5 (X – 2)$

$Y – 3 = 0.5X – 1$

$Y = 2 + 0.5X$

A.2. Cara titik potong-lereng

Sebuah persamaan linier dapat pula dibentuk apabila diketahui titik potongnya pada salah satu sumbu (a) dan lereng garis (b) yang memenuhi persamaan tersebut, maka persamaan liniernya merupakan: Y=ax + b ;

Sedangkan :

a = titik potong,

b = lereng

Contoh Soal:

Andaikan titik potong dan lereng garis y =f (x) masing-masing merupakan 2 dan 0.5, maka persamaan liniernya: y=2 + 5x

A.3. Cara dwi-titik potong

Sebuah persamaan linier dapat pula dibentuk apabila diketahui titik potong garis pada masing-masing sumbu, yaitu titik potong pada sumbu vertikal (ketika x = 0) dan titik potong pada sumbu horisontal (ketika y = 0), maka persamaan liniernya merupakan :

$$Y = a - \frac{a}{c} X$$

Dimana :

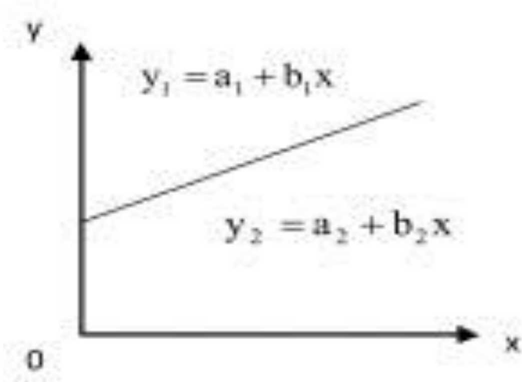
; a = titik potong vertikal,

b = titik potong horisontal

B. **Hubungan Dua garis lurus**

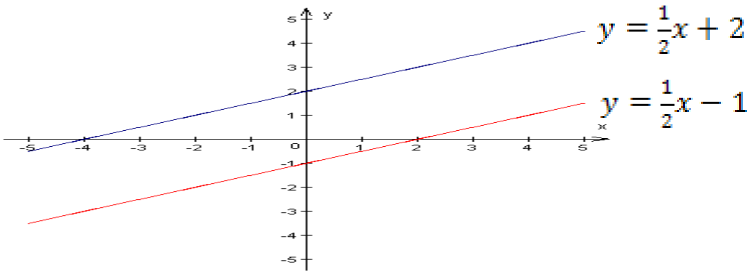
B.1. Berimpit

Dua garis lurus akan berimpit apabila persamaan garis yang satu merupakan kelipatan dari garis yan lain. Dengan demikian, garis $Y_1 = a_1 + b_1X$ akan berimpit dengan garis $Y_2 = a_2 + b_2X$, jika $Y_1 = ny_1$; $a_1 = na_2$; $b_1 = nb_2$



B.2. Sejajar

Dua garis lurus akan sejajar apabila lereng/gradien ke 2 garis, sehingga an , garis $Y_1 = a_1 + b_1X$ akan sejajar dengan garis $Y_2 = a_2 + b_2X$, jika $b_1 = b_2$



B.3. Berpotongan

Apabila mendapatkan suatu fungsi linier yang berpotongan, maka untuk mencari titik potongnya dapat dilakukan dengan cara:

B.3.a. Cara substitusi

Contoh soal:

Carilah titik potong dari 2 fungsi ekonomi dan bisnis yang berpotongan, yaitu 2x+3y = 4 dan x + 2y = 1
Jawab:
2x + 3y = 4..........................(1)
X + 2y = 1............x = 1-2y...(2)
Masukan persamaan (2) pada persamaan (1)
2x + 3y = 4...........2(1-2y) + 3y =4
2 – 4y + 3y = 4
Y = -2.....sehingga diperoleh 2x + 3y = 4
2x + 3(-2) = 4
X = 5

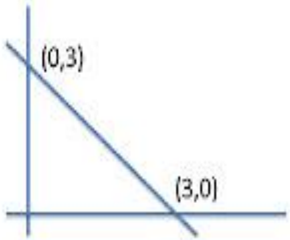
B.3.b. Cara eliminasi
2x + 3y = 4....(*x*1)...........2x + 3y = 4
x + 2y = 1 ....(*x*2) ....2x + 4y = 2 –
\- y = 2
maka.....x + 2y = 1
x + 2(-2) = 1
x = 5

C. **Gradien dan Persamaan garis lurus**

Gradien merupakan koefisien yang menentukan arah garis fungsi linier, biasanya koefisien ini melekat pada variabel X (sisi vertikal)/(sisi horizontal). Jika gambar kurva bergerak dari kiri atas ke kanan bawah maka nilai gradiennya negatif dan juga sebaliknya.

Contoh soal 1:
y=-x+3

Jika x=0 → y=3, koordinat (0,3)
Jika y=0 → x=3, koordinat (3,0)



a. Garis lurus melalui titik A(x1, y1) dan B(x2, y2) memiliki gradien m:

m = y1-y2 / x1-x2 atau m = y2-y1/x2-x1

b. Persamaan garis lurus yang melalui titik A (x1, y1) dan B (x2, y2) merupakan: y-y1 = x-x1

y2-y1=x2-x1

b. Persamaan garis lurus yang bergradien **m** dan melalui titik A (x1, y1), fungsinya merupakan: **y = m (x – x1) + y1**

Dari persamaan (1) dan persamaan (2), dapat ditemukan rumus persamaan garis lurus Y = a + bX, sebagai berikut:

$$\frac{y - y1}{y2 - y1} = \frac{x - x1}{x2 - x1}$$

Contoh soal 2;

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (4,12) dan (8,20).

$$\frac{y - y1}{y2 - y1} = \frac{x - x1}{x2 - x1}$$

$$\frac{y - 12}{20 - 12} = \frac{x - 4}{8 - 4}$$

$$4 (y - 12) = 8 (x - 4)$$

$$y = 2x + 4$$

Latihan Soal

1. Carilah garis yang melalui titik A(4,-4) dan B(2,8)
2. Carilah garis yang melalui titik (4,5) dengan kemiringan (gradien) 12
3. Bagaimanakah hubungan kedua fungsi linier dibawah ini:
   a. $Y = 2X - 8$
      $-2Y = -4X + 16$
   b. $12X = 7 - Y$
      $Y = -7 - 12X$
   b. $Y = 4 + 5X$
      $5X = 24 - Y$

VII. PENERAPAN FUNGSI LINIER DALAM EKONOMI DAN BISNIS

Penerapan suatu fungsi dalam ekonomi dan bisnis sangatlah banyak entah itu fungsi linier maupun non-linier. Fungsi linier sering dijumpai dalam suatu analisa yang membutuhkan suatu kurva. Oleh karena itu materi fungsi khususnya fungsi linier wajib untuk dikuasai.

A. **Fungsi Permintaan (*Demand Function*)**

Fungsi permintaan menunjukkan hubungan antara jumlah barang/jasa yang diminta oleh konsumen (Qd) dengan variabel harga (P) serta variabel lain yang mempengaruhinya pada suatu periode tertentu. Variabel tersebut antara lain harga produk itu sendiri, pendapatan konsumen, harga produk yang diharapkan pada periode mendatang, harga produk lain yang saling berhubungan dan selera konsumen Asumsi yang digunakan adalah faktor-faktor lain tetap (*ceteris paribus*), yaitu selera tetap, pendapatan tetap dan harga barang-barang lain tetap, maka ini menandakan bahwa apabila harga turun jumlah barang yang diminta oleh konsumen naik, demikian pula sebaliknya.

Fungsi permintaan terhadap sesuatu barang dapat ditunjukkan oleh persamaan:

$$Qd = f(Px, Py, Pz, M , S)$$

di mana :

Qd = Jumlah barang yang diminta
Px = harga barang X
Py = harga barang Y
Pz = harga barang z
M = pendapatan konsumen
S = selera konsumen

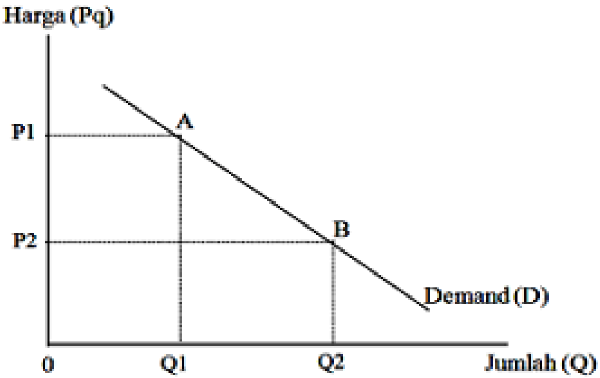
Bentuk umum fungsi permintaan adalah

Qd = a – bPd atau **Pd = -1/b (-a + Qd)**

dengan:

Qd = *Quantity of demand*/banyaknya permintaan
Pd = *Price of demand*/Harga
a dan *b* = Konstanta

Syarat, P $\geq$ 0, Q $\geq$ 0, serta dPd / dQ < 0
Perhatikan kurva permintaan seperti yang terlihat



Hal –hal yang perlu diperhatikan:
1. P = harga per unit; Q = Quantitas barang

2. Kurva permintaan bergerak dari kiri atas ke kanan bawah
3. P dan Q positif
4. Pada suatu tingkatan harga (P) hanya terkandung nilai kuantitas (Q) dan sebaliknya
5. Skala P dan Q tidak perlu sama, karena harga ≠ kuantitas.

Fungsi permintaan disajikan dengan diagram dua dimensi untuk menggambar grafik fungsi yang mengandung dua variabel saja. Agar fungsi permintaan dapat digambar grafiknya, maka faktor-faktor selain jumlah yang diminta dan harga barang tersebut dianggap tidak berubah (ceteris paribus) selama dilakukan analisis. Fungsi permintaan tunduk pada hukum permintaan bahwa "bila harga suatu barang naik, maka jumlah yang diminta konsumen barang tersebut turun; dan sebaliknya bila harga barang turun, maka jumlah barang yang diminta akan bertambah". Di dalam grafik, sumbu Y digunakan untuk harga per unit (P) dan sumbu X digunakan untuk jumlah barang yang ditawarkan (Q).

Contoh soal 1:

Pada saat harga Jeruk Rp. 5.000 per Kg, permintaan akan jeruk tersebut sebanyak 1000 Kg, tetapi pada saat harga jeruk meningkat menjadi Rp. 7.000 Per Kg, permintaan akan jeruk menurun menjadi 600 Kg, buatlah fungsi permintaannya?

Pembahasan: Dari soal diatas diperoleh data:

P1 = Rp. 5.000 Q1 = 1000 Kg

P2 = Rp. 7.000 Q2 = 600 Kg

Untuk menentukan fungsi permintaannya maka digunakan rumus persamaan garis melalui dua titik, yakni:

$$\frac{\mathbf{y - y1}}{\mathbf{y2 - y1}} = \frac{\mathbf{x - x1}}{\mathbf{x2 - x1}}$$

Dengan mengganti x = Q dan y = P maka didapat,

$$\frac{P - P1}{P2 - P1} = \frac{Q - Q1}{Q2 - Q1}$$

Jika data diatas dimasukan kedalam rumus:

$$\frac{P - 5000}{7000 - 5000} = \frac{Q - 1000}{600 - 1000}$$

$$\frac{P - 5000}{2000} = \frac{Q - 1000}{-400}$$

P - 5.000 (-400) = 2.000 (Q - 1000)

-400P + 2.000.000 = 2000Q - 2.000.000

2000Q = 2000.000 + 2.000.000 - 400P

Q = 1/2000 (4.000.000 - 400P)

Q = 2000 - 0,2P

Contoh soal 2:

Diketahui sebuah fungsi permintaan akan ditulis dalam berbagai tingkat harga yaitu: Qd = -2Pd + 100. Tentukan:

a. Banyaknya barang gratis dipasaran?

b. Berapa harga maksimum yang dicapai?

Penyelesaian:

Dari Qd = -2Pd + 100, maka Pd = $\frac{100}{2} - \frac{1}{2}\ Qd$. Sehingga diperoleh bahwa: a = 100 dan b = -2

a. Barang gratis terjadi pada saat Pd = 0.

Qd = -2(0) + 100 = 100

jadi, jumlah barang gratis di pasaran sebanyak 100 unit.

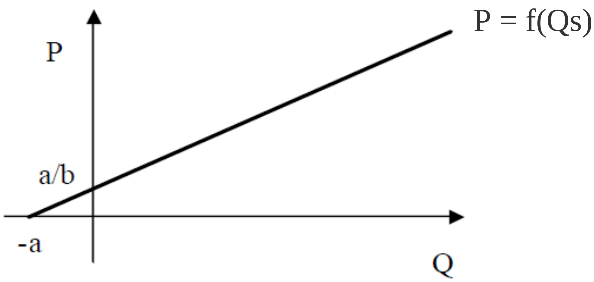
b. Harga maksimum terjadi pada saat Qd = 0.

0 = -2Pd + 100 ....Pd = 100/2 = 50

Jadi harga maksimum adalah 50

B. Fungsi Penawaran (*Supply Function*)

Fungsi Penawaran menunjukkan hubungan antara harga dengan jumlah barang yang ditawarkan kepada konsumen, dengan anggapan faktor-faktor lain tetap (*ceteris paribus*). Maka apabila tingkat harga meningkat, jumlah barang yang ditawarkan bertambah, demikian pula sebaliknya.



Pada grafik penawaran tersebut berlaku kondisi ideal:

1. Pa →Pc: Jumlah barang yang ditawarkan naik Qa→ Qc
2. Pa → Pb: Jumlah barang yang ditawarkan turun Qa → Qb

Notasi fungsi penawaran akan barang *x* adalah:

Qx = f (Px)

$$Qx = -a + b\,Px \;................\; Px = a/b + 1/b\,Qx$$

dimana:

Qx = Jumlah produk x yang ditawarkan

Px = Harga produk x

a dan b = parameter

Contoh soal:

Seandainya untuk jenis barang tertentu fungsi penawarannya ditunjukkan oleh persamaan Q = 3P – 2. Tentukanlah

1. Pada tingkat harga 5, berapakah jumlah yang ditawarkan?
2. Jika produsen bersedia menawarkan sebanyak 10, berapa harga per unit barang tersebut?
3. Berapakah harga terendah yang produsen mau menjual barangnya?

Jawab:

1. Bila harga = 5, maka masukkan P = 5 ke dalam persamaan:

   Q = 3(5) – 2

   = 15 – 2 =13

   Jadi jumlah yang ditawarkan = 13 unit.

2. Untuk Q = 10, maka masukkan ke dalam persamaan

   10 = 3P – 2

   -3P = -10 – 2

   3P=12 atau P = 4, Jadi harga barang tersebut merupakan 4.

3. Pada saat produsen tidak bersedia menawarkan barangnya dapat diberi

simbol Q = 0, dan itu terjadi pada

$$0 = 3P - 2$$

$$-3P = -2 \text{ atau } P = 2/3$$

Jadi harga terendah yang produsen mau menjual barangnya harus pada tingkat harga yang lebih tinggi dari 2/3

C. Fungsi Penerimaan

Fungsi penerimaan disebut juga fungsi pendapatan atau fungsi hasil penjualan. Dilambangkan dengan R (*Revenue*) atau TR (*Total Revenue*). Penerimaan hasil penjualan merupakan fungsi dari jumlah barang yang terjual. Fungsi penerimaan merupakan fungsi dari output: R=f(Q) dengan Q adalah jumlah barang yang terjual. Fungsi penerimaan merupakan hasil kali antara harga jual per-unit dengan jumlah barang yang diproduksi dan laku terjual. Semakin banyak barang yang diproduksi dan terjual semakin besar pula penerimaannya.

Secara matematik, penerimaan merupakan fungsi jumlah barang kurvanya berupa garis lurus berlereng positif dan bermula dari titik pangkal. Dalam menganalisis penerimaan selalu dianggap bahwa perusahaan senantiasa berhasil menjual setiap barang yang dihasilkannya, dengan demikian Q dalam R = f (Q) bukan saja melambangkan jumlah barang dihasilkan tetapi juga melambangkan jumlah barang yang terjual.

Jika P adalah harga jual per unit, maka:

R = P x Q = f(Q), dengan P = harga jual per unit

Q = jumlah produk yang terjual

Fungsi penerimaan umumnya bersifat linier, karena tidak ada alasan mengapa penerimaan menurun bila produksi meningkat, kecuali bila harga jual menurun karena produksi meningkat (teori penawaran).

Contoh Soal :

Harga jual produk yang dihasilkan oleh sebuah perusahaan Rp. 200,- per unit.

a. Tunjukkan persamaan dan kurva penerimaan total perusahaan tersebut !

b. Berapa besar penerimaannya bila terjual barang sebanyak 350 unit ?

Jawab:

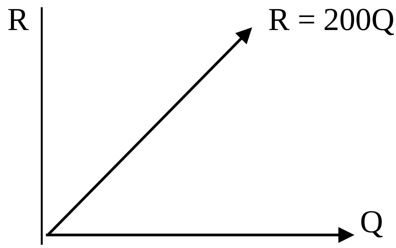
R = Q x P

= Q x 200

R = 200 Q

Bila Q = 350, maka

R=200x350= 70.000



D. Fungsi Biaya

Fungsi Biaya dilambangkan dengan C (*cost*) atau TC (*total Cost*). Biaya total *(total cost)* yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan dalam operasi bisnisnya terdiri atas biaya tetap *(fixed cost)* dan biaya variabel.

Rumus biaya total: **C = g (Q) = FC + VC = k + vQ**

D.1. Biaya Tetap (*Fixed Cost*), merupakan fungsi yang tidak bergantung pada jumlah produksi yang dihasilkan. Berapa unit pun barang yang dihasilkan, jumlah biaya tetap dalam jangka pendek senantiasa tidak berubah.

Rumus : **FC = k**

D.2. Biaya variabel (*Variabel Cost*) merupakan fungsi biaya yang besarnya tergantung pada jumlah barang yang dihasilkan. Semakin banyak jumlah barang yang dihasilkan semakin besar pula biaya variabelnya.

Rumus**: VC = f (Q) = vQ**

Keterangan :

FC : biaya tetap

VC : biaya variabel

C : biaya total

k : konstanta

v : lereng kurva VC dan kurva C.

Jika P adalah biaya produksi per unit, di mana biaya per unit senantiasa lebih kecil dibandingkan harga jual per unit, maka

VC = P x Q dengan P= biaya produksi per unit

Q = jumlah produksi

Contoh Soal:

Biaya tetap yang dikeluarkan oleh suatu perusahaan sebesar Rp. 20.000,- sedangkan biaya variabel ditunjukkan oleh VC = 100Q.

a. Tunjukkan persamaan dan kurva biaya totalnya!

b. Berapa biaya total yang dikeluarkan jika perusahaan tersebut memproduksi 500 unit barang ?

Jawab :

Diketahui: FC=20.000 VC=100Q Q=500

Ditanyakan: a. Persamaan dan kurva biaya total?

b. biaya total yang dikeluarkan?

Dijawab: C= FC+VC

C= 20.000+100Q

C=20.000+100(500)

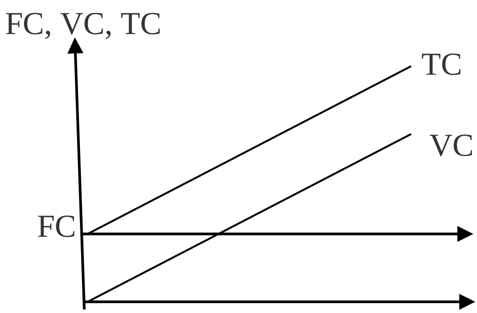
Jadi perusahaan harus mengeluarkan biaya total sebesar Rp. 70.000, untuk memproduksi 500 unit barang.

D.3. Fungsi *Total Cost* (TC) merupakan penjumlahan antara biaya tetap (FC) dengan biaya variabel (VC)

TC = FC + VC

Contoh soal:

Biaya tetap suatu perusahaan sebesar Rp. 100 000 000 dan biaya variabelnya: 3000Q, maka TC = 1 000 000 000+3000Q. Ternyata intersep dari fungsi total biaya (TC) sama dengan biaya tetapnya (FC) dan gradiennya sama dengan gradien fungsi biaya fungsi biaya tetap. Hal ini menunjukkan bahwa penggambaan fungsi total biaya haruslah melalui titik (0, FG) dan sejajar dengan grafik VC.



E. Keseimbangan Pasar (*Market Equilibrium*)

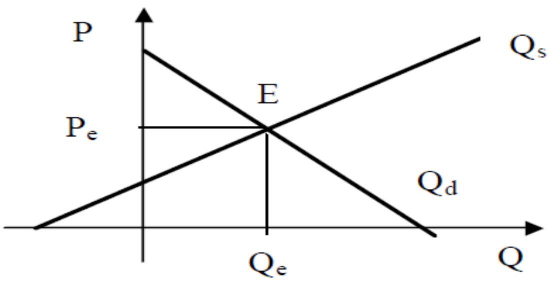
E.1. **Keseimbangan Pasar satu Macam Produk**

Pasar suatu jenis barang dikatakan berada dalam keseimbangan apabila jumlah barang yang diminta dipasar tersebut sama dengan jumlah barang yang ditawarkan. Secara matematik dan grafik hal ini ditunjukkan oleh persamaan :

f (Q_S) = f (Q_D) atau **f(Ps) = f(Pd)**

(Fungsi Penawaran = Fungsi Permintaan)

Pada posisi keseimbangan pasar akan tercipta posisi harga keseimbangan (*equilibrium price*) yaitu pada titik E yang menunjukkan perpotongan kurva permintaan dengan kurva penawaran dan Jumlah keseimbangan (*equilibrium quantity*).



Contoh soal 2:

Bila diperoleh fungsi permintaan dan penawaran terhadap suatu jenis barang tertentu seperti berikut:

$\mathrm{Pd} = 150 - \frac{1}{10}$ Qd unit dan $\mathrm{Ps} = 60 + \frac{1}{20}$ Qs unit

Tentukan harga dan jumlah keseimbangan!

Penyelesaian

$$Pd = 150 - \frac{1}{10}\ Qd$$

10Pd = 1500 – Qd maka Qd = 1500 - 10 Pd

$$Ps = 60 + \frac{1}{20}\ Qs$$

20 Ps = 1200 + Qs maka Qs = 20Ps - 1200

Sehingga:

Qd = Qs ⇔1500 – 10Pe = 20Pe – 1200

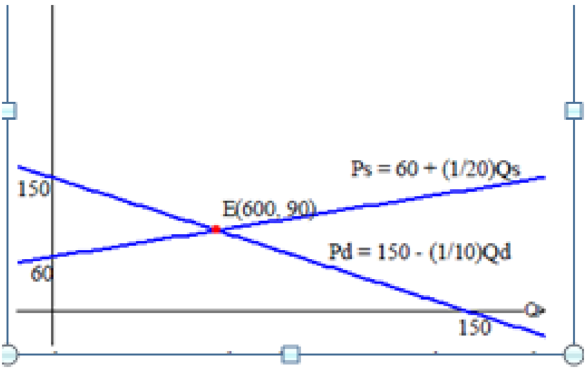
⇔150 – Pe = 2Pe – 120

⇔3Pe = 270

⇔Pe = 90

Untuk Pe = 90, maka: Qe = 1500 – 10Pe = 1500 – 10(90) = 600.

Jadi, harga keseimbangan *Pe* = 90 dan jumlah keseimbangan *Qe* = 600.



E.2. **Keseimbangan Pasar Dua Macam Produk**

Di pasar terkadang permintaan suatu barang dipengaruhi oleh permintaan barang yang lain. Ini bisa terjadi pada dua atau lebih macam produk yang berhubungan secara substitusi (produk pengganti) atau secara komplementer (produk pelengkap). Produk substitusi misalnya: beras dengan gandum, minyak tanah dengan gas elpiji, dan lain-lain. Sedangkan produk komplementer misalnya: teh dengan gula, semen dengan pasir, dan lain sebagainya. Dalam pembahasan ini dibatasi interaksi antara dua macam produk saja.

Secara matematis fungsi permintaan dan fungsi penawaran produk yang beinteraksi mempunyai dua variabel bebas. Kedua variabel bebas yang mempengaruhi jumlah yang diminta dan jumlah yang ditawarkan adalah (1) harga produk itu sendiri, dan (2) harga produk lain yang saling berhubungan.

Notasi fungsi permintaan menjadi:

$$Q_{dx} = a_0 - a_1P_x + a_2P_y$$

$$Q_{dy} = b_0 - b_1P_x + b_2P_y$$

Sedangkan fungsi penawarannya:

$$Q_{sx} = -m_0 + m_1P_x + m_2P_y$$

$$Qs_y = -n_0 - n_1P_x + n_2P_y$$

Dimana:

Qdx = Jumlah yang diminta dari produk X

Qdy = Jumlah yang diminta dari produk Y

Qsx = Jumlah yang ditawarkan dari produk X

Qsy = Jumlah yang ditawarkan dari produk Y

Px = Harga produk X

Py = Harga produk Y

a_0, b_0, m_0, dan n_0 adalah konstanta.

Syarat keseimbangan pasar dicapai jika:

Qsx = Qdx dan **Qsy = Qdy**

Contoh soal 3:

Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran dari dua macam produk yang mempunyai hubungan substitusi sebagai berikut:

$Q_{dx} = 5 - 2Px + Py$

$Q_{dy} = 6 + Px - Py$

Dan

Qsx = -5 + 4Px - Py

Qsy = -4 - Px + 3Py

Carilah harga dan jumlah keseimbangan pasar !

Penyelesaian:

Syarat keseimbangan pasar:

Qsx = Qdx..................-5 + 4Px - Py = 5 - 2px + py

4Px + 2Px - Py - Py = 5 + 5

6Px - 2 Py = 10……………..(1)

Qsy = Qdy.................-4 - Px + 3Py = 6 + Px - Py

-Px - Px + 3 Py + Py = 6 + 4

-2Px + 4Py = 10

4Py – 2Px = 10………………..(2)

Dari (1) dan (2) didapat:

6Px - 2Py = 10…………………...(2x) 12Px - 4Py = 20

-2Px + 4Py = 10…………………(1x) -2Px + 4Py = 10

+

10 Px + 0 = 30

$Px = 3$

$Px = 3 \Rightarrow 6(3) - 2Py = 10$

$2Py = 10-18$

$Py = 4$

Pada saat $Px = 3$ dan $Py = 4$ maka $Qx = 5 - 2(3) + 4$

$= 3$

dan $Qy = 6 + 3 - 4$

$= 5$

F. Pajak

Pajak merupakan jenis pungutan yang dilakukan pemerintah terhadap produsen/penjual sehingga beban pajak akan menambah besarnya biaya yang harus dipikul oleh produsen/penjual. Akibatnya harga yang ditawarkan akan naik, kenaikannya sebesar pajak yang dibebankan. Ada dua macam pajak, antara lain:

F.1. Pajak Per-unit

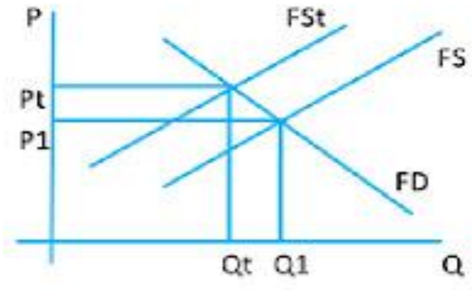
Pajak per unit merupakan pajak yang dikenakan terhadap suatu barang yang besarnya tetap untuk setiap unit barang. Pengenaan pajak sebesar t atas setiap unit barang yang dijual menyekan kurva penawaran bergeser ke atas. Jika sebelum pajak, persamaan penawarannya adalah

$\mathbf{Ps = a + bQs}$

Sesudah dikenai pajak sebesar t untuk setiap unitnya, maka Persamaan akan menjadi

$Ps = a + bQs + t$

$Ps = (a + t) + bQs$



	Sebelum ada pajak	Sesudah ada pajak
Fungsi Permintaan	P = f(Qd)	P = f(Qd)
Fungsi Penawaran	P = f(Qs)	P = f(Qs) + t

- Pajak yang ditanggung konsumen: (Pt – P) Qt
- Pajak yang ditanggung produsen: (Qt .t)- (Pt – P) Qt
- Pajak yang diterima pemerintah: Qt.t

Contoh soal 4

Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan

$Pd = 150 - \frac{1}{10}Qd$, dan fungsi penawarannya $Ps = 60 + \frac{1}{20}Qs$.

Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar 40 per unit.

a. Berapa harga dan jumlah keseimbangan sebelum pajak?

b. Berapa harga dan jumlah keseimbangan sesudah pajak?
c. Berapa beban pajak yang ditanggung oleh konsumen dan produsen?
d. Berapa besar pajak yang diterima oleh pemerintah?

Penyelesaian

$\text{Pd} = 150 - \frac{1}{10}$ Qd maka Qd = 1500 - 10 Pd

$\text{Ps} = 60 + \frac{1}{20}$ Qs maka Qs = 20Ps - 1200

a. Berdasarkan contoh soal sebelumnya, harga keseimbangan sebelum pajak Pe = 90, sedangkan jumlah keseimbangannya adalah Qe = 600.
b. Penawaran sebelum pajak $\text{Ps} = 60 + \frac{1}{20}$ Qs, sehingga penawaran setelah pajak $\text{Ps} = 60 + \frac{1}{20}$ Qs + 40 atau $\text{Ps} = 100 + \frac{1}{20}$ Qs, sehingga
   Qs = 20Ps - 2000
   Sedangkan persamaan permintaannya tetap: Qd=1500–10Pd.
   Keseimbangan pasar terjadi jika: Qd=Qs, sehingga diperoleh:
   1500 – 10Pe = 20Pe – 2000
   ⇔ 30Pe = 3500
   ⇔ Pe = 3500/30
   ⇔ Pe = 116,67
   Untuk Pe = 116,67, maka Qe = 1500 – 10(116,67)
   = 1500 – 1166,7
   = 333,30

Jadi, setelah dikenakan pajak, harga keseimbangan dan jumlah keseimbangannya berturut-turut sebesar $P_e' = 117$ dan $Q_e' = 333$.

c. Beban pajak konsumen: tk = Pe' – Pe = 116,67 – 90 = 26,67 per unit

Beban pajak produsen: tp = t – tk = 40 – 26,67 = 13,33 per unit

d. Besarnya pajak yang diterima oleh pemerintah:

T = Qe'. t = (333,30) (40) = 13332

E.2. Pajak Persentase (proporsional)

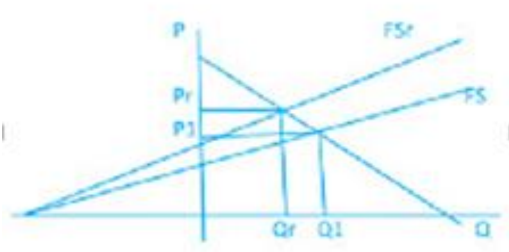
Pajak proporsional adalah pajak yang besarnya ditetapkan berdasarkan persentase tertentu dari harga jual, bukan ditetapkan secara spesifik (misalnya Rp 25 per unit barang) sebagaimana yang berlaku pada pajak per unit sebelumnya. Pengaruhnya sama dengan pajak spesifik yaitu menaikkan harga keseimbangan dan mengurangi jumlah keseimbangan. Misalkan fungsi penawaran sebelum pajak adalah Ps = a + bQs + tP, maka setelah dikenakan pajak proporsional sebesar t% dari harga jual, fungsi penawaran yang baru menjadi:

Ps = a + bQs + tP

Ps - tPs = a + bQs

(1 - t) Ps = a + bQs

$$Ps = \frac{a+bQs}{(1-t)} \text{ sehingga } Ps = \frac{a}{(1-t)} + \frac{b}{(1-t)}\,Qs$$



Contoh soal 5.

Diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah
Pd = 15 – Qd dan fungsi penawarannya adalah
Ps= 3 + 0,5Qs. Kemudian pemerintah mengenakkan pajak sebesar 25% dari harga jual. Hitunglah:

a. Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sebelum dikenakan pajak.

b. Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan setelah dikenakan pajak.

c. Besar pajak yang diterima oleh pemerintah dari setiap unit?

d. Besar beban pajak yang ditanggung oleh konsumen?

e. Besar beban pajak yang ditanggung oleh produsen?

f. Besar pajak yang diterima pemerintah dari perdagangan barang tersebut?

Penyelesaian:

a. Keseimbangan tercapai jika Pd = Ps, sehingga:

15 – Qe = 3 + 0,5Qe maka 1,5Qe = 12

Qe = 12/1,5

Qe = 8

Untuk Qe = 8, maka Pe = 15 – Qe

$= 15 – 8 = 7.$

Harga keseimbangan sebelum dikenakan pajak Pe = 7, sedangkan jumlah keseimbangan sebelum dikenakan pajak adalah Qe = 8.

b. Penawaran sesudah pajak sebesar t = 25% = 0,25 adalah:

$Ps = 3 + 0{,}5Qs + 0{,}25Ps$ maka

$(1 – 0{,}25)Ps = 3 + 0{,}5Qs$

$0{,}75Ps = 3 + 0{,}5Qs$

$3/4Ps = 3 + ½ Qs$

$3Ps = 12 + 2 Qs$

$Ps = 4 + 2/3Qs$

Keseimbangan terjadi jika Pd = Ps sehingga:

$15 - Qe = 4 + 2/3Qe$

$5/3 Qe = 11$

$Qe = 6.6$

Untuk Qe = 6,6 maka Pe = 15 – 6,6 = 8,4.

Jadi, harga keseimbangan setelah dikenakan pajak proporsional sebesar 25% adalah Pe’ = 8,4, dan jumlah keseimbangannya adalah Qe’ = 6,6.

c. Pajak yang diterima pemerintah setiap unit = (t) (Pe’) = (0,25).(8,4) = 2,1.

d. Besarnya beban pajak yang ditanggung oleh konsumen untuk setiap unit dari barang yang dibeli adalah: tk = Pe’ – Pe

$= 8{,}4 – 7$

$= 1{,}4$

atau setara dengan: 1,4/2.1 x 100% = 64%

e. Besarnya beban pajak yang ditanggung oleh produsen untuk setiap unit adalah: tp = t – tk

= 2,1 – 1, 4

= 0,7 atau setara dengan 33%.

f. Jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah dari perdagangan barang tersebut adalah: T = Qe’. t = (6,6).(2,1)

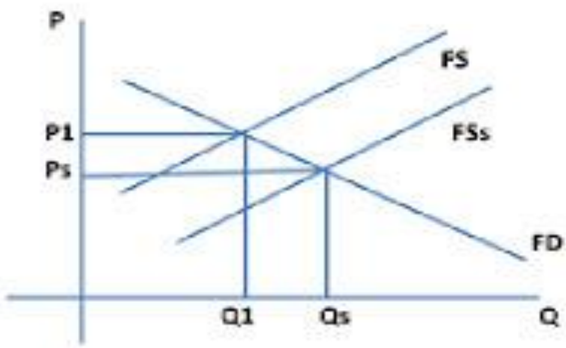
= 13,86.

G. Subsidi

Subsidi merupakan kebalikan dari pajak, pengaruhnya terhadap keseimbangan pasar berbalikan dengan pengaruh pajak. Subsidi yang diberikan atas produksi/penjualan suatu barang menyekan harga jual barang tersebut menjadi rendah. Dengan adanya subsidi, produsen merasa ongkos produksinya menjadi lebih kecil sehingga bersedia menjual lebih murah.

Fungsi sebelum subsidi : FS → P = aQ + b

Fungsi setelah subsidi : FSs → P = aQ + b – S



	Sebelum ada subsidi	Sesudah ada subsidi
Fungsi Permintaan	P = f(Qd)	P = f(Qd)
Fungsi Penawaran	P = f(Qs)	P = f(Qs) - s

Contoh Soal 6;

Perhatikan kembali contoh soal sebelumnya dengan permintaan suatu barang adalah Pd = 15 – Qd dan fungsi penawarannya adalah Ps = 3 + 0,5Qs. Pemerintah memberikan subsidi sebesar 1.5 atas setiap unit barang yang diproduksi.

a. Berapa besar harga serta jumlah keseimbangan setelah subsidi?
b. Berapa besar subsidi yang dinikmati konsumen?
c. Berapa besar subsidi yang dinikmati produsen?

d. Berapa besar jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah?

Penyelesaian:

a. Dari soal 5 telah diperoleh bahwa Pe = 7, dan Qe = 8.

Permintaan tanpa subsidi: Pd = 15 – Qd

Penawaran tanpa subsidi: Ps = 3 + 0,5Qs

Penawaran dengan subsidi: Ps = 3 + 0,5Qs – 1,5

= 1,5 + 0,5Qs

Keseimbangan pasar terjadi jika Pd = Ps, sehingga:

15 – Qe = 1,5 + 0,5Qe maka 1,5Qe = 13,5

- Qe = 13,5/1,5
- Qe = 9

Untuk Qe = 9, maka Pe = 15 – Qe

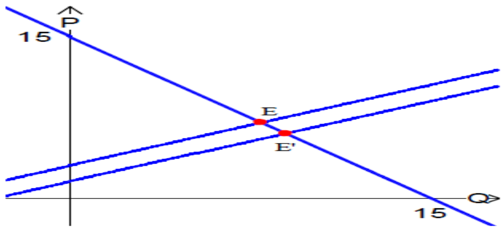
= 15 – 9 = 6

Jadi, harga keseimbangan setelah subsidi Pe’= 6, sedangkan jumlah keseimbangan setelah diberi subsidi adalah Qe’= 9.

b. Besarnya subsidi yang dinikmati oleh konsumen dari setiap unit barang yang dibeli adalah: sk = Pe – Pe’ = 7 – 6 = 1 atau setara dengan 67%

c. Besarnya subsidi yang dinikmati oleh produsen dari setiap unit barang yang ditawarkannya adalah: sp = s – sk = 1,5 – 1 = 0,5 atau setara dengan 33% dari subsidi per unit barang.

d. Besarnya jumlah subsidi yang yang diberikan oleh pemerintah adalah: S = Qe’s = (9).(1,5) = 13,5.



H. Fungsi Konsumsi Dan Tabungan

H.1. Fungsi Konsumsi

Fungsi konsumsi mempunyai beberapa asumsi, yaitu:

1. Terdapat sejumlah barang konsumsi mutlak tertentu untuk mempertahankan hidup walaupun tidak mempunyai pendapatan.
2. Konsumsi berhubungan dengan pendapatan yang siap dibelanjakan. (C=f(Yd))
3. Jika pendapatan yang siap dibelanjakan meningkat, maka konsumsi juga akan meningkat walaupun dalam jumlah yang lebih sedikit.
4. Proporsi kenaikan pendapatan yang siap dibelanjakan untuk konsumsi adalah konstan (MPC = *Marginal Propensity to Consume*)

Berdasarkan asumsi tersebut persamaan fungsi konsumsi adalah:

$$C = a + bY$$

Dimana: C = Konsumsi

Y = Pendapatan yang siap dibelanjakan

a = Konsumsi mutlak

b = Kecenderungan konsumsi marginal (MPC)

Fungsi tabungan dapat diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan di atas dalam persamaan pendapatan: Y=C+S sehingga menghasilkan:

Y = (a + bY) + S

S = Y – (a + bY)

S = -a + (1-b) Y

Dimana: S = Tabungan

-a = Tabungan negatif bila pendapatan sama dengan nol

H.2. Fungsi Tabungan

Fungsi tabungan menjelaskan hubungan antara tabungan dan pendapatan nasional yang secara umum bentuk persamanya sebagai berikut,

S = g(Y) = So + sY

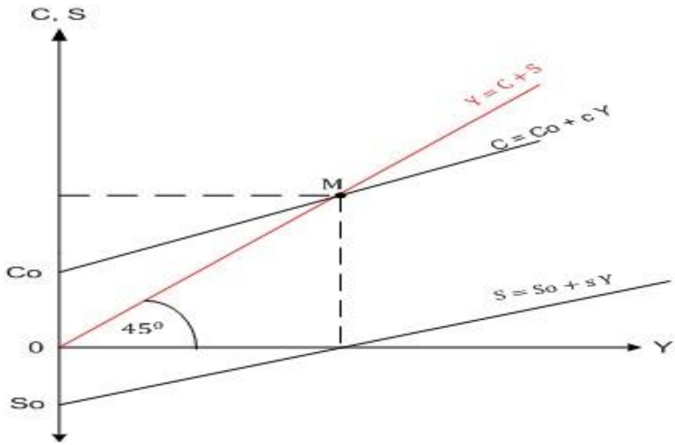
Keterangan,

So: tabungan otonom

s : MPS = …S/…Y

konstanta So menunjukkan besarnya tabungan otonom (*autonomous saving*) merupakan penggal kurva tabungan pada sumbu vertikal S. Koefisien “s” adalah *Marginal Propensity to Save* merupakan lereng dari kurva tabungan.

Kurva konsumsi dan tabungan dapat digambarkan secara bersama-sama pada sistem sumbu silang seperti di bawah ini,



Garis bantu Y=C+ S yang membentuk sudut 45^0 merupakan penjumlahan grafik kurva C dan kurva S. Pada titik M nilai S= 0, berarti seluruh pendapatan dialokasikan untuk keperluan konsumsi. Di sebelah kanan titik M pendapatan lebih besar daripada konsumsi sehingga kelebihan pendapatan tersebut bisa ditabung, hal ini tercermin dari positifnya kurva S. Sedangkan di sebelah kiri titik M pendapatan lebih kecil daripada konsumsi, berarti sebagian konsumsi dibiayai bukan dari pendapatan sendiri melainkan dari sumber lain misalnya pinjaman. Dalam kondisi ini tabungannya negatif (*dissaving*). Pada titik O (0,0) seluruh konsumsi bahkan dibiayai bukan dari pendapatan, besarnya konsumsi sama dengan tabungan negatif.

Contoh soal 7:

Konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh persamaan C= 30+0,8Y.

a. Bagaimanakah fungsi tabungannya?

b. Bagaimanakah besarnya konsumsi jika tabungan sebesar 20?

Jawab :

a. $S = Y - C$

$= Y - (30 + 0{,}8\ Y)$

$= -30 + 0{,}2\ Y$

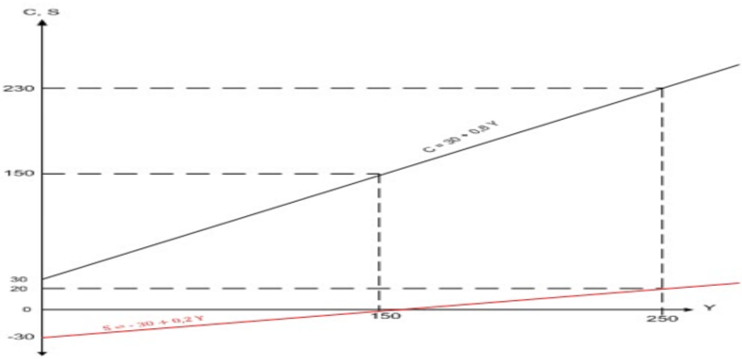
b. Jika besarnya S = 20 maka,

$S = -30 + 0{,}2\ Y$

$20 = -30 + 0{,}2\ Y$

$0{,}2\ Y = 50$,,,,,,,,,,,,$Y = 250$

Jadi besarnya konsumsi dengan tabungan sebesar 20 adalah C= Y – S = 230.



Latihan Soal 8;

1. Untuk suatu komoditi, pada tingkat harga 6 jumlah permintaan sebesar 20 sedangkan pada tingkat harga 4

jumlah permintaan menjadi 30. Bagaimanakah fungsi permintaannya?

2. Diberikan fungsi permintaan Qd = 40-4P dan fungsi penawaran Qs=5+5P
   a. Carilah k eseimbangan harga dan kuantitasnya di pasar
   b. Gambarlah kedua fungsi tersebut pada sebuah grafik kartesius
   c. Jika dikenakan pajak sebesar Rp 300/unit barang, berapakah keseimbangan harga dan kuantitasnya yang baru di pasar?
   d. Berapakah tarif pajak dan total pajak yang dibebankan kepada konsumen (arsirlah pada gambar kartesius)
   e. Berapakah tarif pajak dan total pajak yang dibebankan kepada produsen (arsirlah pada gambar kartesius)
3. Fungsi permintaan suatu komoditi Qd=35-3P dan fungsi penawarannya Qs=6+2P. Produsen tersebut menerima tarif subsidi sebesar s=15/unit barang.
   a. Carilah keseimbangan harga dan kuantitas di pasar sebelum dan sesudah subsidi
   b. Gambarkan perubahan akibat subsidi tersebut
   c. Berapa tarif subsidi yang diterima konsumen
   d. Berapa tarif subsidi yang diterima produsen
   e. Berapa total subsidi yang diberikan pemerintah
   f. Berapa total subsidi yang dinikmati konsumen
   g. Berapa total subsidi yang dinikmati produsen

h. Arsirlah total subsidi masing-masing pada gambar kartesius (soal b).

VIII. FUNGSI NON-LINIER

Fungsi non-linier merupakan bagian yang penting dalam matematika untuk ekonomi dan bisnis, karena pada umumnya fungsi-fungsi yang menghubungkan variabel-variabel ekonomi dan bisnis bentuknya tidak linier. Fungsi non linier ini dapat berperan berupa fungsi kuadrat dan fungsi rasional (fungsi pecah). Gambar dari fungsi ini bukanlah suatu garis lurus, mlainkan suatu garis lengkung. Oleh itu dengan mempelajari bentuk-bentuk fungsi non-linier dan memahami sifat-sifatnya sangat bermanfaat dalam mendalami teori-teori ekonomi dan bisnis.

Model-model persamaan yang dipilih untuk diterapkan dapat dilakukan lebih tepat dan mendekati keadaan yang sebenarnya. Fungsi nonlinier merupakan fungsi yang banyak sekali digunakan dalam ekonomi dan bisnis, karena lebih mendekati keadaan nyata. Banyak masalah dalam ilmu ekonomi dan bisnis yang menggunakan fungsi non-linier sebagai model, khususnya persamaan-persamaan kuadratik. Meskipun demikian tidak semua aplikasinya dimuat dalam modul ini. Ada 4 macam bentuk fungsi non linier yang paling sering dijumpai dalam analisis ekonomi dan bisnis, yaitu: Fungsi Kuadrat, Fungsi Kubik, Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritma

A. Rumus Kuadarat (ABC)

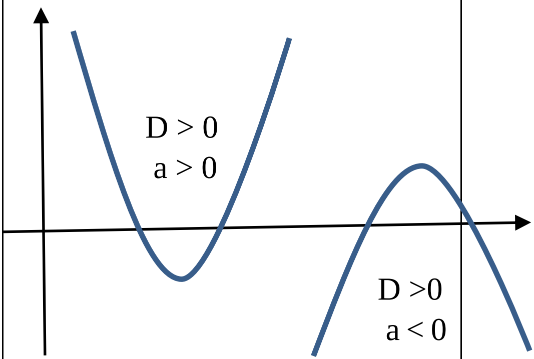
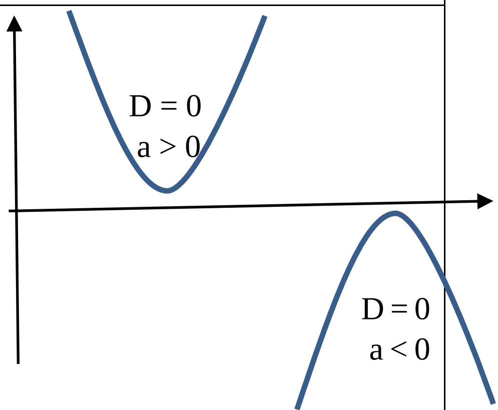
Jika Y = 0, maka bentuk umum dari fungsi kuadrat $Y = aX^2 + bX + c$ akan menjadi persamaan kuadrat $aX^2 + bX + c = 0$. Nilai-nilai penyelesaian untuk X yang juga di sebut akar-akar dari persamaan kuadrat dapat diperoleh dengan cara memfaktorkan atau dengan menggunakan rumus kuadrat. Rumus kuadrat ini

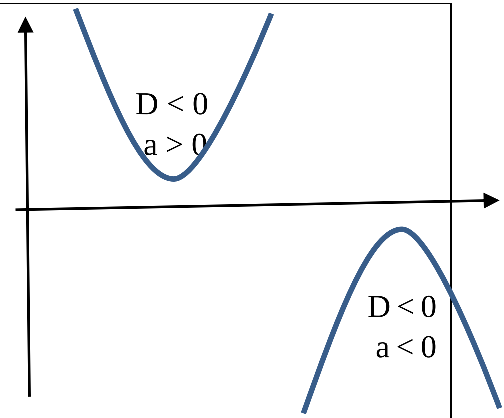
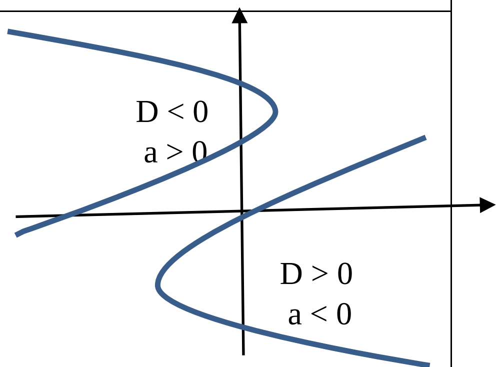
$$X_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Suku di tanda akar pada persamaan yaitu $b^2 - 4ac$ disebut diskriminan (D). Nilai diskriminan ini akan menentukan apakah parabola vertikal memotong, menyinggung atau tidak memotong maupun menyinggung sumbu X. Jika nilai "$b^2 - 4ac$" adalah negatif maka tidak terdapat titik potong dengan sumbu X. Jadi, rumus kuadrat di gunakan bila nilai $b^2 - 4ac$ positif atau sama dengan nol. Tanpa melihat gambar parabola, titik maksimum dan titik minimum dapat ditentukan dengan melihat nilai parameter a dan nilai dari diskriminan, D. Berikut ini terdapat 6 kemungkinan bentuk parabola:

1. Jika $a > o$ dan $D > 0$, maka parabola akan terbuka ke atas dan memotong sumbu X di dua titik yang berlainan.
2. Jika $a > 0$ dan $D = 0$, maka parabola akan terbuka ke atas dan menyinggung sumbu X di dua titik yang berhimpit.
3. Jika $a > 0$ dan $D < 0$, maka parabola akan terbuka ke atas dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu X.
4. Jika $a < 0$ dan $D = 0$, maka parabola akan terbuka ke bawah dan memotong sumbu X di dua titik yang berlainan.

5. Jika a < 0 dan D = 0, maka parabola akan terbuka ke bawah dan menyinggung sumbu X di dua titik yang berhimpit.
6. Jika a < 0 dan D < 0, maka parabola akan terbuka ke bawah dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu X.

Grafik memotong sumbu X	
Grafik menyinggung sumbu X	

Grafik diatas dan dibawah sumbu X	
Grafik memotong sumbu X dan Sumbu Y	

Contoh soal 1:

Tentukan titik ekstrim dan perpotongannya dengan sumbu-sumbu koordinat (sumbu x dan y) dari parabola berikut: $Y = - X^2 + 6X – 2$. Sumbu simetri sejajar sumbu Y

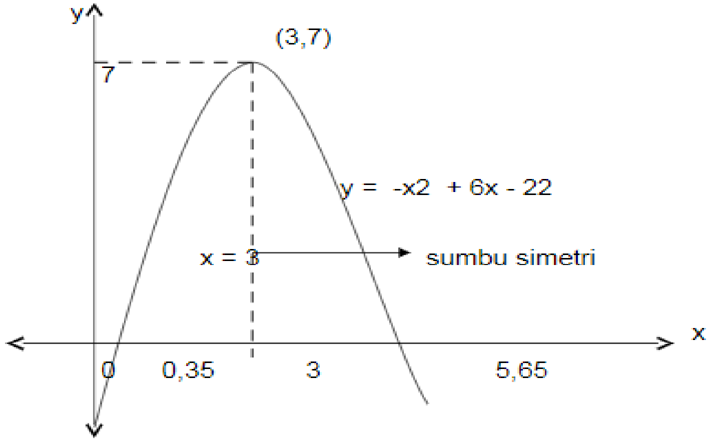
Karena nilai $a = -1 < 0$; maka parabolanya menghadap ke bawah.

Titik ekstrimnya terletak di atas atau titik maksimum, dengan titik koordinat

$$\left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right\} = \left\{\frac{-6}{2(-1)}, \frac{-(6^2-4(-1)(-2))}{-4(-1)}\right\} = \left\{\frac{-6}{-2}, \frac{36-8)}{4}\right\} = (3, 7)$$

Perpotongan dengan sumbu Y terjadi saat X = 0 dan Y = -2

Perpotongan dengan sumbu X terjadi pada saat Y = 0 dan $0 = -X^2 + 6X - 2$. Dengan menggunakan rumus a b c diperoleh $X_1 = 5{,}65$ dan $X_2 = 0{,}35$



B. Fungsi Kuadrat

Diantara ke empat fungsi non linier tersebut yang paling sering digunakan adalah fungsi kuadrat. Fungsi kuadrat dengan satu variabel bebas adalah fungsi polinomial tingkat dua, dimana fungsi ini mempunyai bentuk umum, Y = Fungsi (x) = $a_o + a_1X + a_2x^2$ atau bila koefisien-koefisien diubah, maka bentuknya adalah: $Y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dimana : Y = Variabel terikat

x = Variabel bebas

a, b, dan c = konstanta dan $a \neq 0$.

Bentuk ini bila digambarkan pada bidang koordinat mempunyai suatu parabola vertikal. Tetapi dalam penerapan ekonomi dan bisnis, yang paling sering digunakan adalah fungsi kuadrat berbentuk Parabola. Bentuk yang lebih umum dari fungsi kuadrat :

$a X^2 + b Y^2 + c X + d Y + p X Y + e = 0$, dimana a atau $b \neq 0$

sebuah fungsi kuadrat jika mempunyai ciri-ciri berikut ini maka :

Jika $p = 0$ dan $a = b \neq 0 \Rightarrow$ bentuk kurvanya Lingkaran

$p^2 - 4ab < 0$; $a \neq b$ dan tanda sama $\Rightarrow$ bentuk kurvanya Elips

$p^2 - 4ab > 0$; a & b tanda berlawanan $\Rightarrow$ bentuk kurvanya Hiperbola

$p^2 - 4ab = 0 \Rightarrow$ bentuk kurvanya Parabola.

berarti jika salah satu saja yaitu jika $a = 0$ atau $b = 0$ tetapi tidak keduanya, maka kurvanya akan berbentuk Parabola.

B.1. Fungsi Berbentuk Lingkaran

Bentuk umum persamaan suatu lingkaran sebagai berikut:

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

Pusat dan jari-jari lingkaran dapat dicari dengan cara memanipulasi persamaan umumnya dengan sedemikian rupa, sehingga pada akhirnya diperoleh bentuk baku rumus lingkaran. Bentuknya yaitu:

$$(x - \mathrm{i})^2 + (y - \mathrm{j})^2 = r^2$$

Contoh soal 2:

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $3x^2 + 3y^2 - 24x - 18y - 33 = 0$. Tentukan juga perpotongannya pada masing-masing sumbu koordinat.

Jawab:

$3x^2 + 3y^2 - 24x - 18y - 33 = 0$

$3x^2 + 3y^2 - 24x - 18y = 33$

$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 11$

$x^2 - 8x + y^2 - 6y = 11$

$x^2 - 8x + k1 + y^2 - 6y + k2 = 11 + k1 + k2$

$(x^2 - 8x + k) + (y^2 - 6y + k2) = 11 + k1 + k2$

$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) = 11 + 16 + 9$

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 6^2$

Pusat lingkarannya adalah titik (4,3), jari-jari = 6

Dengan rumus *abc* diperoleh $x = 9{,}19$ dan $x^2 = -1{,}19$

dengan rumus *abc* diperoleh $y = 7{,}47$ dan $y^2 = -1{,}47$

Jadi, lingkaran tersebut memotong sumbu –x pada posisi x = 9,19 dan x = –1,19 serta memotong sumbu –y pada kedudukan y= 7,47 dan y=1,47

B.2. Fungsi Berbentuk Parabola

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik fokus dan sebuah garis lurus yang disebut direktriks. Setiap parabola mempunyai sebuah fokus dan sebuah garis lurus yang disebut direktriks. Setiap parabola mempunyai sebuah sumbu simetri dan sebuah titik ekstrim. Persamaan parabola :

$Y= aX^2 + bX + c$ jika sumbu simetri // sumbu vertikal (sumbu y)

$X = aY^2 + bY + c$, sumbu simetri // sumbu horisontal (sumbu x)

Koordinat titik puncak dari suatu parabola dapat diperoleh dengan rumus:

Titik Puncak $= \left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right\}$

Dimana : a, b dan c merupakan parameter atau konstanta dalam persamaan

C. Fungsi pangkat 3 (Kubik)

Fungsi kubik atau fungsi berderajat tiga merupakan fungsi yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah pangkat tiga dan mempunyai bentuk umum : $Y = a_0 + a_1 X + a_2X^2 + a_3 X^3$. Setiap fungsi kubik setidak-tidaknya mempunyai sebuah titik belok (*inflextion point*), yaitu titik peralihan bentuk kurva dari cekung menjadi cembung atau cembung menjadi cekung. Selain titik belok, suatu fungsi kubik mungkin mempunyai 1 titik ekstrim (maksimum atau minimum) atau 2 titik ekstrim (maksimum atau minimum).

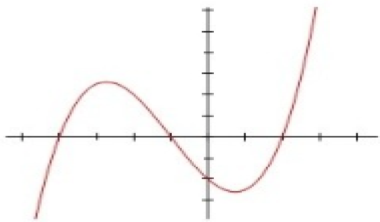
Ada tidaknya titik ekstrim dalam suatu fungsi kubik tergantung pada besarnya nilai-nilai b, c, dan d di dalam persamaannya. Dengan demikian dapat diperoleh beberapa kemungkinan mengenai bentuk kurva suatu fungsi kubik. Fungsi kubik ini bila digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius, kurvanya mempunyai dua lengkung (*concave*) yaitu lengkung ke atas dan lengkung sehingga hanya mempunyai titik belok.

Persamaan parabola : $y = a X^3 + b X^2 + c X + d$

Fungsi Kubik

Mencari :

1. Titik Ekstrims
2. Titik Belok



D. Fungsi Rasional

Suatu fungsi rasional mempunyai bentuk umum :

$$Y = \frac{g\,(X)}{h\,(x)} = \frac{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 X + a_0}{b_m X^0 + b_{m-1} X^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 X + b_0}$$

Dimana :

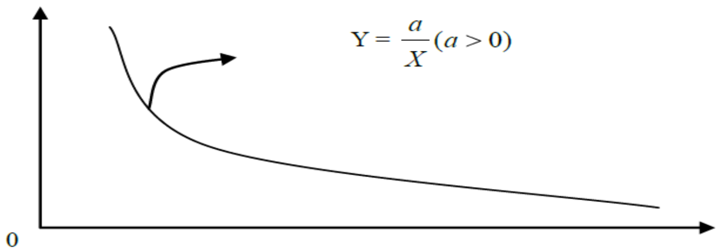
G (X) = Fungsi polinomial tingkat ke-n

H (X) = Fungsi polinomial tingkat ke-m dan tidak sama dengan 0

Fungsi rasional ini bila digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius kurvanya akan berbentuk hiperbola dan mempunyai sepasang sumbu asimtot. Sumbu asimtot merupakan sumbu yang didekati kurva hiperbola tetapi tidak pernah menyinggung. Fungsi rasional yang istimewa dan sering ditetapkan dalam ilmu ekonomi dan bisnis adalah berbentuk:

$$Y = \frac{a}{X} \text{ atau } XY = a, \text{ Dimana : } a > 0$$

Bentuk fungsi rasional diatas kurvanya adalah hiperbola segi empat dan mempunyai satu sumbu asimtot tegak yang berimpit dengan sumbu Y dan satu sumbu asimtot datar yang berimpit dengan sumbu Y. jadi, bila nilai Y diperbesat, kurva hiperbola akan mendekati sumbu Y dan bila nilai X diperbesar kurva hiperbola akan mendekati sumbu X. Bentuk umum dari fungsi rasional adalah: (X-h) (Y – k) = C. Hal ini ditunjukan dalam gambar berikut :



Contoh :

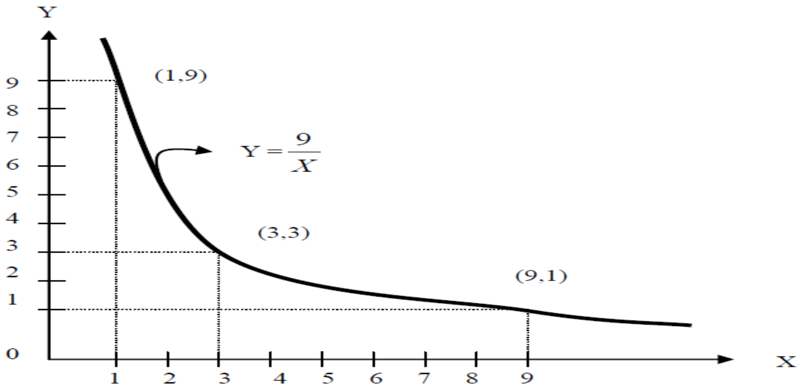
Jika diketahui fungsi rasional Y = , gambarkanlah kurva hiperbolanya ? Penyelesaian :

Jika X = 1, maka Y = 9, sehingga titik koordinatnya (1,9)

Jika X = 3, maka Y = 3, sehingga titik koordinatnya (3,3)

Jika X = 9, maka Y = 1, sehingga titik koordinatnya (9,1)

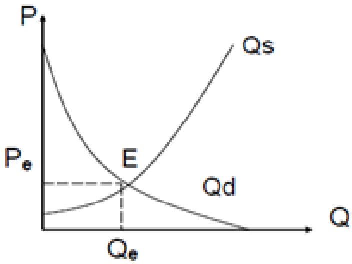
Kurva hiperbola ini ditunjukkan oleh gambar sebagai berikut :


Y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
(1,9)
$Y = \frac{9}{X}$
(3,3)
(9,1)
1 2 3 4 5 6 7 8 9
X

IX. PENERAPAN FUNGSI NON-LINIER DALAM EKONOMI DAN BISNIS

A. Fungsi Permintaan dan Penawaran

Selain berbentuk fungsi linier, permintaan dan penawaran dapat pula berbentuk fungsi non linier. Kurva permintaan dan penawaran bersama-sama akan membentuk harga dan jumlah keseimbangan. Harga dan jumlah keseimbangan merupakan titik potong kurva penawaran dan permintaan yang nilainya dapat ditentukan secara grafis dengan melukiskan kedua kurva secara seksama. Fungsi permintaan dan fungsi penawaran yang kuadratik dapat berupa potongan lingkaran, potongan elips, potongan hiperbola maupun potongan parabola. Cara analisa keseimbangan pasar untuk permintaan dan penawaran yang non linier sama seperti halnya dalam soal yang linier. Keseimbangan pasar ditunjukkan oleh kesamaan Qd = Qs, pada perpotongan kurva permintaan dan kurva penawaran.



Keseimbangan Pasar:
Qd = Qs
Qd = jumlah permintaan
Qs = jumlah penawaran
E = titik keseimbangan
Pe = harga keseimbangan
Qe = jumlah keseimbangan

Analisis pengaruh pajak dan subsidi terhadap keseimbangan pasar juga sama seperti pada kondisi linier. Pajak atau subsidi menyekan harga jual yang ditawarkan oleh produsen berubah, tercermin oleh berubahnya persamaan penawaran, sehingga harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar berubah. Pajak menyebabkan harga keseimbangan menjadi lebih tinggi dan jumlah keseimbangan menjadi lebih sedikit. Sebaliknya subsidi menyebabkan harga keseimbangan menjadi lebih rendah dan jumlah keseimbangan menjadi lebih banyak.

Contoh Soal 1:

Fungsi permintaan suatu barang ditunjukan oleh persamaan $Qd = 19 - P^2$, sedangkan fungsi penawarannya adalah $Qs = -8 + 2P^2$ Berapakah harga dan jumlah keseimbangan di pasar ?

Jawab :

Keseimbangan Pasar

$$Qd = Qs$$
$$19 - P^2 = -8 + 2P^2$$
$$P^2 = 9$$
$$P = 3 \equiv Pe$$
$$Q = 19 - P^2$$
$$= 19 - 3^2$$
$$Q = 10 \equiv Qe$$

Harga dan jumlah keseimbangan pasar adalah E (10, 3)

Jika misalnya terhadap barang yang bersangkutan dikenakan pajak spesifik sebesar 1 per unit, maka persamaan penawaran sesudah pengenaan pajak menjadi :

$$Qs' = -8 + 2(P-1)^2$$
$$= -8 + 2(P^2-2P+1)$$
$$= -6 - 4P + 2P^2$$

Keseimbangan pasar yang baru :

$$Qd = Qs'$$
$$19 - P^2 = -6 - 4P + 2P^2$$
$$3P^2 - 4P - 25 = 0$$

Untuk mencari nilai P dengan rumus “abc”

$$X_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$P_{12} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-25)}}{2(3)}$$

$$P_{12} = \frac{4 \pm \sqrt{316}}{6}$$

$P_{12} = \frac{4 \pm 17,78}{6}$ diperoleh P_1= 3,63 dan P_2 = –2,30 (tidak dipakai karena harga negatif adalah irrasional). Dengan memasukkan P = 3,63 ke dalam persamaan Qd atau Qs‘ diperoleh Q = 5,82. Jadi, dengan adanya pajak: Pe‘ = 3,63 dan Qe‘ = 5,82

Selanjutnya dapat dihitung beban pajak yang menjadi tanggungan konsumen dan produsen per unit barang, serta jumlah pajak yang diterima oleh pemerintah, masing-masing:

tk = Pe‘ – Pe = 3,63 – 3 = 0,63

tp = t – tk = 1 – 0,63 = 0,37

T = Qe‘ x t = 5,82 x 1 = 5,82

A.1. Fungsi Permintaan (D)

Fungsi Permintaan adalah persamaan yang menunjukkan hubungan antara jumlah suatu barang yang diminta dengan faktor-faktor yang mempengaruhinya. Fungsi permintaan adalah suatu kajian matematis yang digunakan untuk menganalisa perilaku konsumen dan harga. Fungsi permintaan mengikuti hukum permintaan yaitu apabila harga suatu barang naik maka permintaan akan barang tersebut juga menurun dan sebaliknya apabila harga barang turun maka permintaan akan barang tersebut meningkat. Jadi hubungan antara harga dan jumlah barang yang diminta memiliki hubungan yang terbalik, sehingga gradien dari fungsi permintaan (b) akan selalu negatif.

Bentuk umum fungsi permintaan dengan 2 variabel adalah sebagai berikut:

Qd = a - bPd atau Pd = -1/b (-a + Qd)

dimana :

a dan b = adalah konstanta, dimana b harus bernilai negative

b = $\frac{\Delta Qd}{\Delta Pd}$

Pd = adalah harga barang per unit yang diminta

Qd = adalah banyaknya unit barang yang diminta

Syarat, $P \geq 0$, $Q \geq 0$, serta $dPd / dQ < 0$

Contoh soal 3:

Jika fungsi permintaan adalah $P = 16 - Q^2$, gambarkanlah fungsi permintaan tersebut dalam satu diagram ini.

Penyelesaian:

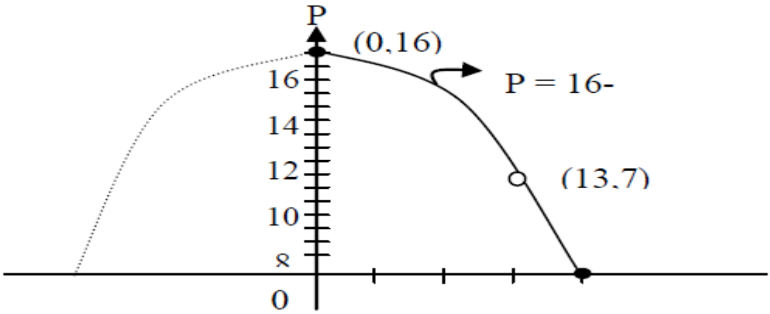
Jika Q=0, maka P=16 sehingga titik potong sumbu P (0,16)

Jika P = 0, maka $0 = 16 - Q^2$; atau $Q^2 = 16$;

maka $Q_1 = +4$ dan $Q = -4$ (tidak memenuhi).

Jadi titik potong dengan sumbu Q adalah (4,0) dan (-4,0)

Jika Q = 3, maka P = 7, sehingga titik koordinatnya (3,7)



P
(0,16)
P = 16-
(13,7)
16
14
12
10
8
0

A.2. Fungsi Penawaran (S)

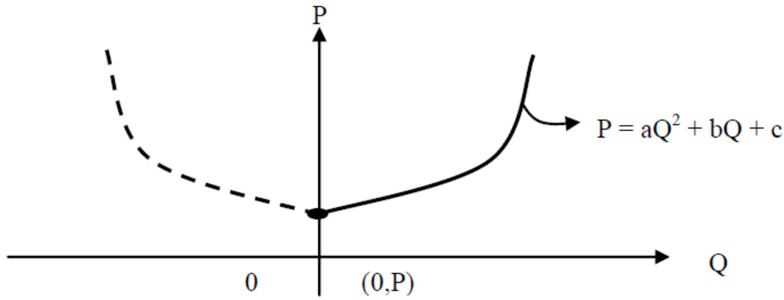
Fungsi penawaran adalah persamaan yang menunjukkan hubungan harga barang di pasar dengan jumlah barang yang ditawarkan oleh produsen. Fungsi penawaran digunakan oleh produsen untuk menganalisa kemungkinan banyak barang yang akan diproduksi. Menurut hukum penawaran bila harga barang naik, dengan asumsi cateris paribus (faktor-faktor lain dianggap tetap), maka jumlah barang yang ditawarkan akan naik, dan sebaliknya apabila harga barang menurun jumlah barang yang ditawarkan juga menurun. Jadi dalam fungsi penawaran antara harga barang dan jumlah barang yang ditawarkan memiliki hubungan posifit, karenanya gradien (b) dari fungsi penawaran selalu positif. Bentuk umum fungsi penawaran kuadrat $P = f(Q)$ adalah: $P = c + bQ + aQ^2$ dimana :

P = Harga Produk

Q = Jumlah produk yang ditawarkan

a,b,c adalah konstanta dan $a > 0$

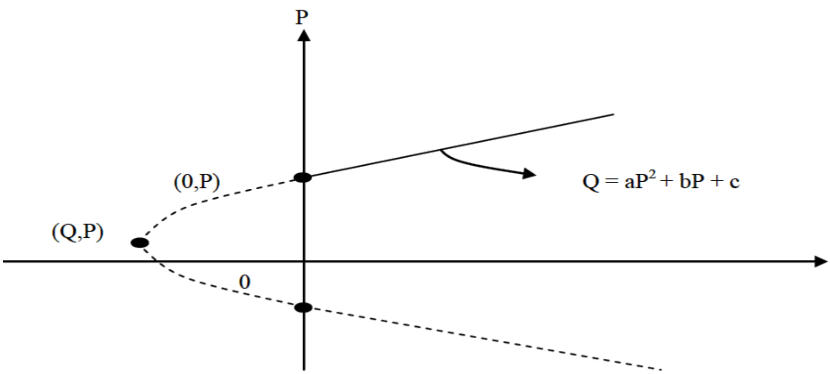
Karena parameter $a > 0$ pada persamaan, maka parabola akan terbuka ke atas. Gambar dari parabola yang terbuka ke atas ini menunjukkan kurva penawaran



Sedangkan bila fungsi penawaran kuadrat berbentuk Q = f(P), maka bentuk umumnya adalah: $Q = c + bP + aP^2$
Dimana

Q = jumlah produk yang ditawarkan
P = harga produk
a,b, dan c adalah konstanta dan a > 0

karena parameter a > 0 pada persamaan, maka parabola akan terbuka ke kanan. Gambar parabola yang terbuka ke kanan ini menunjukan kurva penawaran dan gambarnya seperti tampak pada gambar berikut:



Contoh soal 4:

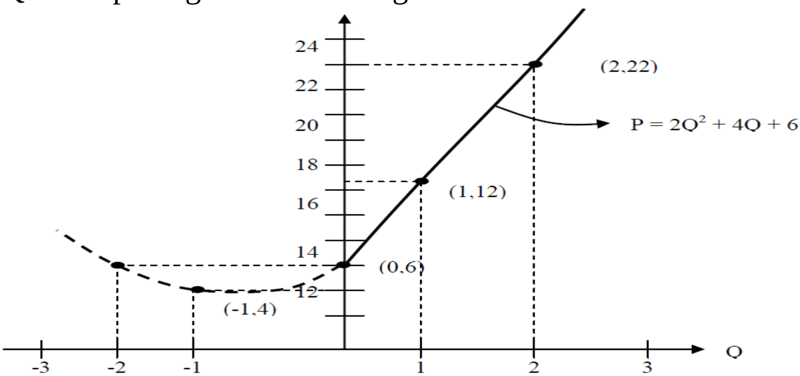
Jika fungsi penawaran ditunjukkan oleh $P = 2Q^2 + 4Q + 6$, gambarkanlah fungsi penawaran tersebut.

Penyelesaian:

Jika Q = 0, maka P = 6 sehingga titik potong dengan sumbu P adalah (0,6) Jika Q = 1, maka P = 12 sehingga koordinatnya (1,12)

Jika Q = 2, maka P = 22 sehingga titik koordinatnya (2,22)

Jadi berdasarkan titik potong dengan sumbu P dan titik koordinat, maka gambar dan fungsi penawaran $P = 2Q^2 + 4Q + 6$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Contoh soal 5:

Fungsi penawaran ditunjukkan oleh $Q = 5P^2 - 10P$, gambarkanlah fungsi tersebut!

Penyelesaian:

Jika Q = 0, maka $5P^2 - 10P = 0$

$$5P\,(P-2) = 0$$

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = 0$$

Jadi titik potong dengan sumbu P adalah (0,0) dan (0,2)

Jika P = 3 , maka Q = 15 sehingga titik koordinatnya (15,3)

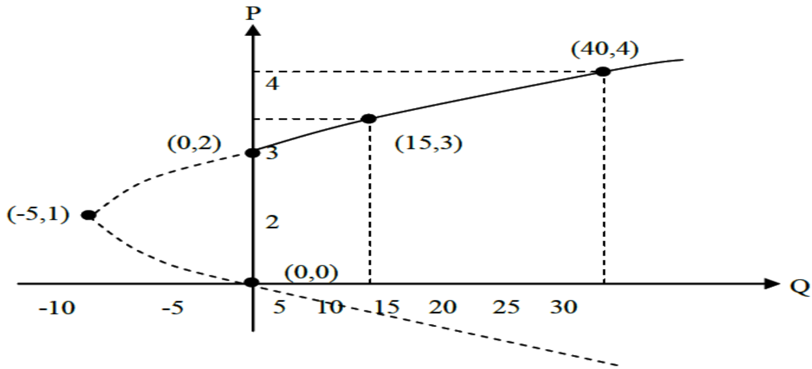
Jika P = 4, maka Q = 40 sehingga titik koordinatnya (40,4)

Koordinat titik puncak = $\left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right\}$

$$= \left\{\frac{10}{10}, \frac{-(100-(4)(5)(0)D}{4(5)}\right\}$$

= (1, -5)

Jadi berdasarkan titik-titik potong dengan sumbu Q dan P serta titik koordinat, maka gambar dari fungsi permintaan $Q = 5P^2 - 10P$ sebagai berikut:



B. Fungsi Biaya

Biaya atau ongkos pengertian secara ekonomi dan bisniss merupakan beban yang harus dibayar produsen untuk menghasilkan barang dan jasa sampai barang tersebut siap untuk dikonsumsi. Biaya merupakan fungsi dari jumlah produksi, dengan notasi C = f(Q).

C = biaya total

Q = jumlah produksi.

Fungsi biaya merupakan hubungan antara biaya dengan jumlah produksi yang dihasilkan, fungsi biaya dapat digambarkan ke dalam kurva dan kurva biaya menggambarkan titik-titik kemungkinan besarnya biaya di berbagai tingkat produksi. Dalam membicarakan biaya ada beberapa macam biaya, yaitu:

a. Biaya Total (*Total Cost* =TC=C= FC + VC = k + f (Q) = c (Q))

b. Biaya Variabel (*Variabel Cost* = VC)

c. Biaya Tetap (*Fixed Cost* = FC)

d. Biaya Total Rata-Rata (*Average Total Cost* = AC)

e. Biaya Variabel Rata Rata (*Average Variabel Cost*=AVC= $\frac{VC}{Q}$)

f. Biaya Tetap Rata-Rata (*Average Fixed Cost* = AFC= $\frac{FC}{Q}$)

g. Biaya rata-rata : AC = $\frac{C}{Q}$ = AFC + AVC

g. Biaya Marginal MC =$\frac{\Delta C}{\Delta Q}$

Bentuk non linier dari fungsi biaya umumnya berupa fungsi kuadrat dan fungsi kubik (x^3). Selain pengertian biaya tetap, biaya variabel dan biaya total, dalam konsep biaya dikenal pengertian biaya rata-rata (*average cost*) dan biaya marjinal (*marginal cost*). Biaya rata-rata adalah biaya untuk menghasilkan tiap unit produk, merupakan hasil bagi biaya total terhadap jumlah keluaran yang dihasilkan. Adapun biaya marjinal merupakan biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghsilkan satu unit tambahan produk

a. Biaya total merupakan fungsi kuadrat

Biaya total (C) maupun biaya variabel (VC) sama-sama berbentuk parabola. Perbedaan antara keduanya terletak pada konstanta c, yang mencerminkan biaya tetap (FC). Secara grafik, kurva C dan kurva VC adalah sebangun, dengan perbedaan sejarak c. Karena C dan VC berbentuk parabola, maka dengan memanfaatkan rumus titik ekstrim parabola, dapat dihitung tingkat produksi (Q) pada C minimum dan VC minimum serta besarnya C minimum dan VC minimumnya. C dan VC yang berbentuk parabola membawa konsekuensi AC dan AVC berbentuk linear; sementara AFC asimtotik terhadap kedua sumbu C dan sumbu Q, se F linear.

b. Biaya total merupakan fungsi kubik

Biaya total berfungsi kubik seperti di atas selalu membuahkan AC dan AVC berbentuk parabola terbuka ke atas. Sedangkan AFC tetap asimtotik terhadap sumbu C dan sumbu Q, se FC selalu berupa konstanta yang kurvanya sejajar sumbu Q.

Contoh Soal 2.

Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $C=2\ Q^2 - 24\ Q + 102$. Pada tingkat produksi berapa unit biaya total ini minimum? Hitunglah besarnya biaya total minimum tersebut. Hitung pula besarnya biaya tetap, biaya variabel, biaya rata-rata, biaya tetap rata-rata dan biaya variabel rata-rata pada tingkat produksi tadi. Seandainya dari kedudukan ini produksi dinaikkan dengan 1 unit, berapa besarnya biaya marjinal?

Penyelesaian

Berdasarkan rumus titik ekstrim parabola, C minimum terjadi pada kedudukan: $Q = \frac{-b}{2a} = \frac{24}{4} = 6$

Besarnya C minimum: $2Q^2 - 24\,Q + 102$

$2(6)^2 - 24(6) + 102 = 30$

Selanjutnya pada Q = 6:

Biaya tetap : FC = 102

Biaya variabel : $VC = 2Q^2 - 24\,Q = 2(6)^2 - 24(6) = -72$

$$AC = \frac{C}{Q} = \frac{30}{6} = 5$$

$$AVC = \frac{VC}{Q} = \frac{-72}{6}$$

$$AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{102}{6} = 17$$

Jika Q = 7, $C = 2(7)^2 - 24(7) + 102 = 32$

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{32 - 30}{7 - 6} = 2$$

Berarti untuk menaikkan produksi dari 6 unit menjadi 7 unit diperlukan biaya tambahan (biaya marjinal) sebesar 2

C. Keseimbangan Pasar (E)

1. Keseimbangan pasar satu macam produk

Syarat untuk mencapai keseimbangan pasar adalah jumlah produk yang diminta oleh konsumen harus sama dengan jumlah prosuk yang ditawarkan produsen (Qd=Qs) atau harga produk yang diminta sama dengan produk yang ditawarkan (Pd = Ps)

Contoh soal 6:

Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan Qd = 19 –P; sedangkan penawarannya Q = -8 + 2 P2. Berapa harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasar?

Keseimbangan pasar : Qd = Qs

$$19 - P^2 = -8 + 2P^2$$

$$27 = 3P^2 \text{ , diperoleh } P = 3$$

Sehingga diperoleh Pe = 3 dan Qt = 10

2. Keseimbangan pasar dua macam produk

Fungsi permintaan dan penawaran dapat perluas menjadi fungsi yang memiliki dua variabel bebas yaitu harga produk itu sendiri dan harga produk lain yang saling behubungan. Misalnya ada dua produk x dan y yang saling behubungan dimana;

Qdx = Jumlah yang diminta untuk produk x
Qdy = Jumlah yang diminta untuk produk y
Px = Harga barang x
Py = Harga barang y

Contoh soal 7:

Diketahui fungsi permintaan dan penawaran dua macam produk yang memiliki hubungan subsitusi :

Qdx = 4 – 2Px + Py

$Qdy = -4 + Px + 5Py$
$Qsx = -8 + 3Px – 5Py$
$Qsy = 5 – Px – Py$
Carilah keseimbangan pasarnya
Jawab :

$Qdx = Qsx$

$4 – 2Px + Py = -8 + 3Px – 5Py$...........$12 = 5Px – 6Py$ (1)

$Qdy = Qsy$

$-4 + Px + Py = 5 – Px – Py$..................$9 = 2Px + 6Py$ (2)

$12 = 5Px – 6Py$
$\underline{9 = 2Px + 6Py}$ +
$21 = 7Px$ ....$Px = 3$
$9 = 2Px + 6Py$........$9 = 2 (3) + 6 Py$
$9 = 6 + 6 Py$
$6Py = 3$................$Py = ½$
$Qdy = -4 + Px + 5Py$
$= 4 – 6 + ½ = -1 ½$

Contoh soal 8:

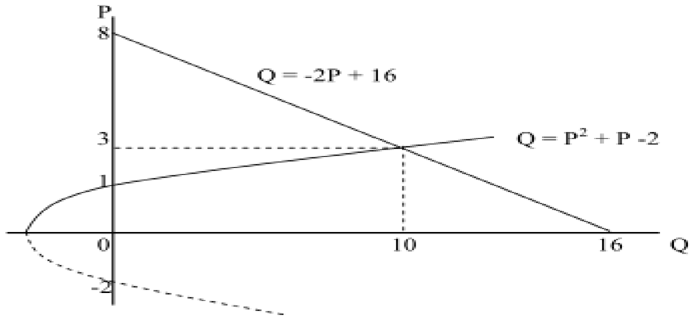
Hitunglah jumlah dan harga keseimbangan dari kurva penawaran dan kurva permintaan berikut:

$Q s = P^2 + P – 2$
$Q d = -2P + 16$

Keseimbangan tercapai jika Q s = Q d

Jadi: $P 2 + P - 2 = -2P + 16$
$P^2 + 3P - 18 = 0$
$(P - 3)(P + 6) = 0$….$P_1 = -6$ (tidak dipakai) dan $P_2 = 3$

Untuk P = 3, maka Q = -2(3) + 16 = 10
Jadi harga keseimbangan: P = 3 dan Jumlah keseimbangan: Q=10



Contoh Soal 9:

Berapakah harga dan jumlah keseimbangan dari suatu fungsi penawaran dan permintaan berikut:

$2P = 5Q_s + 2$

$3P = -Q_d^2 - 2Q_d + 26$

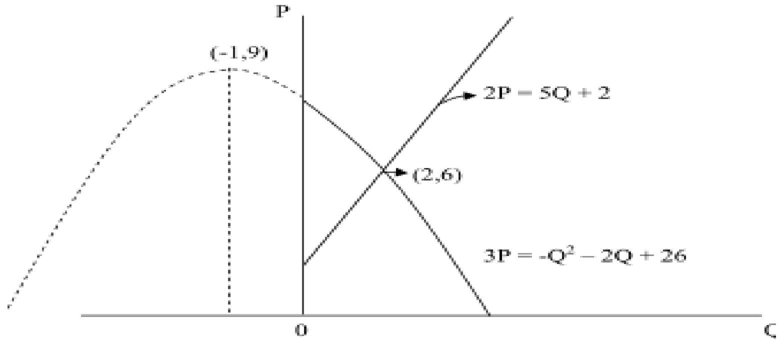
$Q_d = Q_s$, maka $6P = 15Q + 6 = -2Q^2 - 4Q + 52$

$$2Q^2 + 19Q - 46 = 0$$
$$2Q^2 + 23Q - 4Q - 46 = 0$$
$$Q(2Q + 23) - 2(Q + 23) = 0$$
$$(2Q + 23)(Q - 2) = 0$$

$Q_1 = -11,5$ (tidak dipakai)

$Q_2 = 2$

Untuk Q = 2, maka P = ½ (5(2) + 2) = 6
Jadi harga keseimbangan = P = 6
Jumlah keseimbangan = Q = 2.



D. Pengaruh Pajak (t) Pada Keseimbangan Pasar

Jika sesuatu produk dikenakan pajak oleh pemerintah, maka akan terjadi perubahan keseimbangan atas produk tersebut. Pada produk tertentu akan menyekan harga produk tersebut naik karena produsen membebankan sebagian pajak pada konsumen, sehingga jumlah produk yang diminta pun berkurang. Keseimbangan pasar sebelum dan sesudah kena pajak dapat digambarkan sebagai berikut.

TG = Pajak total oleh pemerintah = d, b, Et, Pt

TK = Pajak yang ditanggung oleh konsumen = Pt, Po, C, Et

TP = Pajak yang ditanggung oleh produsen = Po, C, B, d

Maka : TK = (Pt – Po) Qt

TG = t.Qt

TP = TG – TK

Qt = Jumlah kseimbangan setelah kena pajak.

Contoh soal 10:

Diketahui suatu produk ditunjukan fungsi permintaan Pd = 8 + Q dan fungsi penawaran Ps = 16 – 2Q. Produk tersebut dikenakan pajak sebesar Rp. 3,-/unit

a. berapa harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah pajak?

b. berapa besar penerimaan pajak oleh pemerintah ?

c. Berapa besar pajak yang ditanggung kosumen dan produsen ?

Jawab ;

a. $Pd = Ps$

$7 + Q = 16 - 2Q$

$3Q = 9$

$Q = 3$

$P = 7 + Q$

$P = 7 + 3$

$P = 10$

Jadi keseimbangan pasar sebelum pajak E (3,10)

$Pt = 16 - 2Q + t$

$= 16 - 2Q + 3$

$= 19 - 2Q$

$Pt = Pd$

$19 - 2Q = 7 + Q$

$3Q = 12$

$Q = 4$

$Pt = 19 - 2Q$

$= 19 - 8 = 11$

Jadi keseimbangan pasar setelah pajak E (4,11)

b. $TG = t.Qt$

$= 3 . 4$

$= 12$ (Besarnya penerimaan pajak pemerintah Rp. 12)

c. $TK = (Pt - Po) Qt$

$= (11 - 10)\ 4$

$= 4$ (Besar pajak yang ditanggung konsumen Rp. 4)

Tp $= TG - TK$

$= 12 - 4$

$= 8$ (Besar pajak yang ditanggung produsen Rp. 8)

E. Pengaruh Subsidi Pada Keseimbangan Pasar

Subsidi (s) adalah bantuan yang diberikan pemerintah pada produsen terhadap produk yang dihasilkan/dipasarkan, sehingga harga yang berlaku dipasar lebih rendah sesuai dengan keinginan pemerintah dan daya beli masyarakat meningkat. Fungsi penawaran setelah subsidi adalah $F(Q) = P + S$ atau $P = F(Q) - S$

Contoh Soal 11;

Permintaan akan suatu komoditas dicerminkan oleh $Q = 12 - 2P$ sedangkan penawarannya $Q = -4 + 2P$ pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp. 2,- setiap unit barang.

a. berapakah jumlah dan harga keseimbangan sebelum subsidi ?

b. berapakah jumlah dan harga keseimbangan sesudah subsidi ?

c. berapa bagian dari subsidi untuk konsumen dan produsen ?

d. berapa subsidi yang diberikan pemerintah ?

Jawab ;

a.) $Qd = Qs$ $\qquad\qquad$ $Q = 12 - 2P$

$12 - 2P = -4 + 2P$ $\qquad\qquad$ $= 12 - 8$

4P = 16 = 4

P = 4

(Keseimbangan pasar sebelum subsidi So (4, 4)

b.) Qd = 12 – 2P => P = ½ Qd + 6 Pd = Pss

Qs = -4 + 2P => P = ½ Qs + 2 - ½ Q + 6 = ½ Q

Pss = ½ Q + 2 – 2 Q = 6

Pss = ½ Q P = ½ Q

P = 3

Keseimbangan pasar setelah subsidi Ss (6, 3)

c.) SK = (Po – Ps) Qs

SP = S – ((Po – Ps) Qs)

= 12 – ((4 – 3) 6) = 6

SK = 6

SG = Qs . s

= 6 . 2 = 12

(Besar subsidi untuk produsen Rp. 6)

(Besar subsidi untuk konsumen = Rp. 12)

d.) Subsidi yang diberikan pemerintah

SG = s . Qs

= 2 . 6

= 12

F. Fungsi Penerimaan dan Biaya

Bentuk fungsi penerimaan total (total revenue, R) yang non linear pada umumnya berupa sebuah persamaan parabola terbuka ke bawah. Penerimaan total merupakan fungsi dari jumlah barang juga merupakan hasil kali jumlah barang dengan harga barang per unit. Seperti halnya konsep biaya, dalam konsep penerimaan dikenal pengertian rata-rata dan marjinal. Penerimaan rata-rata (*average revenue*, AR) merupakan penerimaan yang diperoleh per unit barang, merupakan hasilbagi penerimaan total terhadap jumlah barang. Penerimaan marjinal (*marginal revenue*, MR) merupakan penerimaan tambahan yang diperoleh dari setiap tambahan satu unit barang yang dihasilkan atau terjual.

Dalam menganalisa biaya umumnya tidak terlepas dari analisa penerimaan (*revenue*) atau total revenue. Pengertian penerimaan (*revenue*) adalah seluruh pendapatan yang diterima dari hasil penjualan barang pada tingkat harga tertentu. Secara matematik total revenue dirumuskan sebagai berikut:

Penerimaan total R = Q x P = f (Q)

Penerimaan rata-rata $\text{AR} = \dfrac{\text{R}}{\text{Q}}$

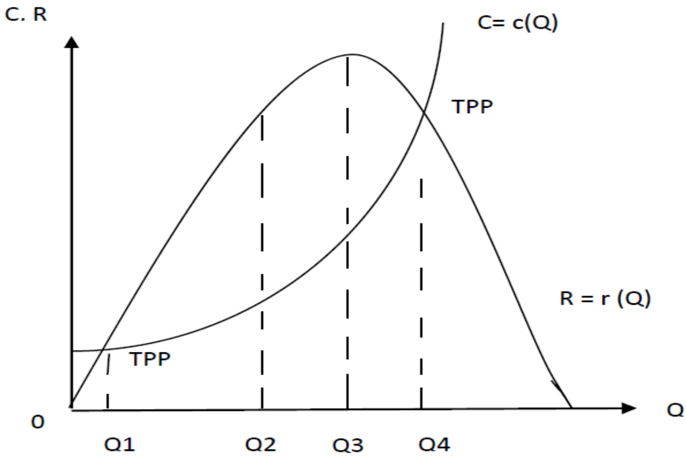
Penerimaan marjinal $\text{MR} = \dfrac{\text{R2 - R1}}{\text{Q2 - Q1}}$

Keuntungan, Kerugian dan Pulang Pokok

- **Keuntungan** (profit positif, **π > 0**) akan didapat apabila ***R*** > ***C***
- **Kerugian** (profit negatif, **π < 0**) akan dialami apabila ***R*** < ***C***

- Konsep berkenaan dengan ***R*** dan ***C*** adalah konsep ***break-even,*** yaitu konsep untuk menentukan jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian.
- Keadaan ***break-even*** (profit nol, **π = 0**) terjadi apabila R = 0; perusahaan tidak memperoleh keuntungan tetapi tidak pula mengalami kerugian. Secara grafik, hal ini ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva ***R*** dan kurva ***C***.

Analisis Pulang Pokok (*break-even*) yaitu suatu konsep yang digunakan untuk menganalisis jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian. Keadaan pulang pokok (profit nol, $\pi = 0$) terjadi apabila R = C ; perusahaan tidak memperoleh keuntungan tetapi tidak pula menderita kerugian. Secara grafik hal ini ditunjukkan oleh perpotongan antara kurva R dan kurva C.



Tingkat produksi Q_1 dan Q_4 mencerminkan keadaan pulang pokok, penerimaan total sama dengan pengeluaran (biaya) total, R=C. Area disebelah kiri Q_1 dan sebelah kanan Q_4 mencerminkan keadaan rugi, penerimaan total lebih kecil dari pengeluaran total, R< C. Sedangkan area diantara Q_1 dan Q_4 mencerminkan keadaan untung, penerimaan total lebih besar dari pengeluaran total, R>C. Tingkat produksi Q_3 mencerminkan tingkat produksi yang memberikan penerimaan total maksimum. Besar kecilnya keuntungan dicerminkan oleh besar kecilnya selisih positif antara R dan C. Keuntungan maksimum tidak selalu terjadi saat R maksimum atau C minimum.

Contoh soal 12:

Penerimaan total yang diperoleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $R = -0{,}1Q^2 + 20Q$, sedangkan biaya total yang dikeluarkan $C = 0{,}25Q^3 - 3Q^2 + 7Q + 20$.

Hitunglah profit perusahaan ini jika dihasilkan dan terjual barang sebanyak 10 dan 20 unit ?

Jawab ;

π = R – C

= $-0{,}1Q^2 + 20Q - 0{,}25Q^3 + 3Q^2 - 7Q - 20$

$\pi = -0{,}25Q^3 + 2{,}9Q^2 + 13Q - 20$

Q = 10 π

= $-0{,}25(1000) + 2{,}9(100) + 13(10) - 20$

= $-250 + 290 + 130 - 20 = 150$ (keuntungan)

Q = 20 π

= $-0{,}25(8000) + 2{,}9(400) + 13(20) - 20$

= $-2000 + 1160 + 260 - 20 = -600$ (kerugian)

Contoh Soal 13:

Penerimaan total yang diperoleh suatu perusahaan ditunjukkan oleh fungsi $R = -0{,}1Q^2 + 300Q$, sedangkan biaya total yang dikeluarkannya $C = 0{,}3Q^2 - 720Q + 600.000$. Hitunglah :

1. Tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum ?
2. Tingkat produksi yang menunjukkan biaya total minimum ?
3. Manakah yang lebih baik bagi perusahaan, berproduksi pada tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum atau biaya total minimum ?

Jawab :

$R = -0{,}1Q^2 + 300Q$

$C = 0{,}3Q^2 - 720Q + 600.000$

R maksimum terjadi pada Q = $\frac{-b}{2a} = \frac{-300}{0.2} = 1500$ unit

C minimum terjadi pada

π pada R maksimum

Q = 1500 $\rightarrow$ $\pi = -0{,}4Q^2 + 1020Q - 600.000$

$= -0{,}4(1500)^2 + 1020(1500) - 600.000$

$= 30.000$

π pada C minimum

Q = 1200 $\pi = -0{,}4Q^2 + 1020Q - 600.000$

$= -0{,}4(1200)^2 + 1020(1200) - 600.000$

$= 30.000$

Latihan Soal

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut

1) Permintaan: $2Q + P = 10$
   Penawaran: $P^2 - 4Q = 4$
2) Permintaan: $2Q^2 + P = 9$
   Penawaran: $Q^2 + 5Q - P = -1$
3) Permintaan: $Q = 64 - 8P - 2P^2$
   Penawaran: $Q = 10P + 5P^2$
4) Permintaan: $PQ + 12P + 6Q = 97$
   Penawaran: $P - Q = 6$

Dapatkan fungsi penerimaan dan gambar grafiknya bila diketahui fungsi permintaannya sebagai berikut

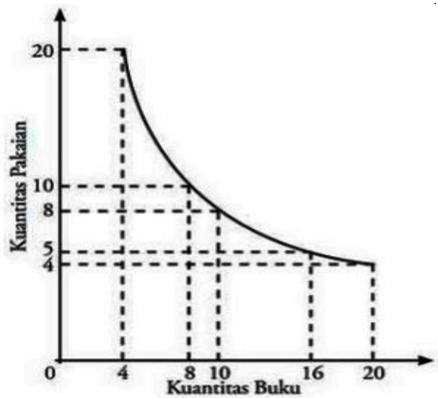
5) Permintaan: $P + 2Q = 5$
6) Permintaan : $Q + 2P = 10$

X. KURVA INDIFEREN

Setiap orang tahu persis berapa penghasilannya sebulan. Dalam waktu tersebut ia harus membelanjakan uangnya untuk membeli barang dan jasa yang dibutuhkannya. Dalam teori ini terdapat asumsi yang menyatakan bahwa konsumen dapat memilih kombinasi konsumsi tanpa harus mengatakan bagaimana ia memilihnya. Kalau dimisalkan hanya ada dua macam barang yang dapat dibelinya, yaitu barang x dan y, maka tempat kedudukan, titik-titik yang koordinatnya menunjukkan kombinasi pembelian kedua macam barang dinamakan kurva indiferen.

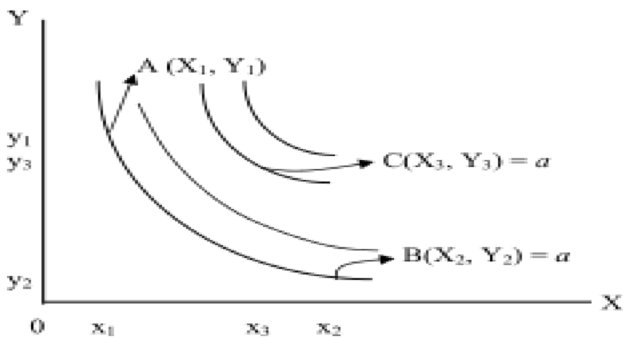
Sebagai contoh, Diberikan kombinasi barang tertentu, misal 10 unit pakaian dan 8 unit buku. Kemudian, diberi beberapa alternatif pilihan kombinasi barang dengan jumlah yang berbeda, misalnya 8 unit pakaian dan 10 unit buku (lihat tabel dibawah ini):

Kombinasi benda	Pakaian	Buku
A	20	4
B	10	8
C	8	10
D	5	16
E	4	20



Tabel dan Kurva di atas merupakan salah satu dari berbagai kemungkinan yang tak terhitung banyaknya. Pembuatan tabel dan kurva semacam ini dapat diulang sebanyak yang diperlukan. Misalnya, dapat membuat tabel dan kurva yang menggambarkan kombinasi barang yang memberikan tingkat utilitas yang lebih besar kepada konsumen.

Kurva indiferen merupakan kurva yang menunjukkan titik-titik kombinasi jumlah barang x dan y yang dikonsumsi pada tingkat kepuasan tertentu. Dengan pendekatan kurva indiferen, konsumen ingin memperoleh kepuasan maksimum, yaitu mencapai kurva indiferen tertinggi dengan kendala pendapatan yang tersedia. Jadi dalam satu kurva indiferen, tingkat kepuasan yang diperoleh adalah sama. Kurva indiferen dapat ditunjukan oleh fungsi f(x,y) =a, di mana x dan y adalah macam barang yang dikonsumsi dan a menunjukkan tingkat kepuasan. Perhatikan gambar berikut ini:



Sumbu horisontal digunakan untuk menunjukkan jumlah barang x yang dikonsumsi dan sumbu vertikal untuk jumlah barang y. Kurva indiferen f(x,y) = a, seperti telah disebutkan di atas merupakan tempat kedudukan titik-titik kombinasi jumlah barang x dan y yang dikonsumsi pada tingkat kepuasan tertentu. Seandainya konsumen memilih kombinasi di titik A, maka jumlah barang x yang dikonsumsi sebanyak x_1 dan jumlah barang y yang dikonsumsi sebanyak y_1 . Bila kombinasi yang dipilih adalah titik B, maka jumlah barang x yang dikonsumsi sebanyak x_2 dan barang y yangdikonsumsi sebanyak y_2. Konsumen akan mengkonsumsi di kombinasi A atau kombinasi B tidak menjadi persoalan, karena baginya kepuasan yang diperoleh sama saja yaitu sebesar a.

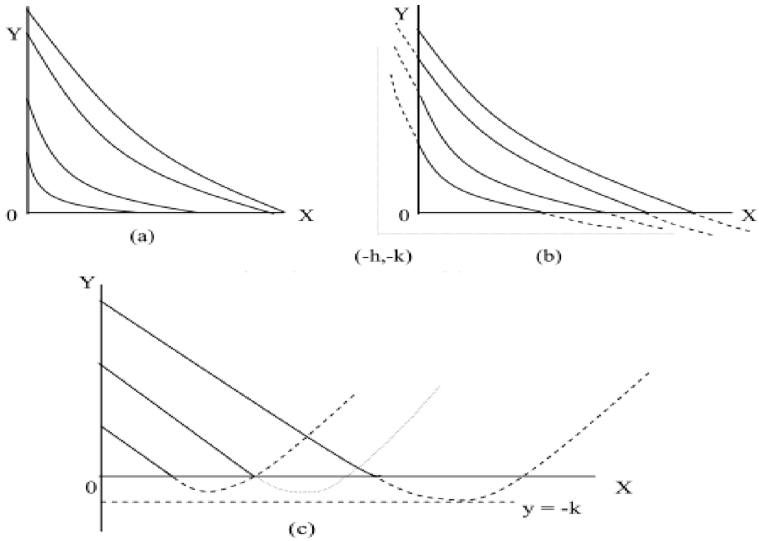
Apabila parameter a besarnya diubah-ubah, maka akan diperoleh himpunan kurva indiferen yang satu sama lain tidak saling memotong (Gambar 10). Pada umumnya konsumen akan bertambah kepuasannya apabila dengan sejumlah uang yang sama dapat membeli barang x atau y dalam jumlah yang lebih banyak. Oleh se itu kombinasi di titik $C(x_3, y_3)$ akan memberikan kepuasan yang lebih besar dari titik A (x_1, y_1) karena $x_3 > x_1$, sehingga kedua titik terletak di kurva indiferen yang berbeda.

Pada gambar di atas, dapat dilihat bahwa kurva indiferen merupakan kurva yang menurun, karena untuk menambah jumlah barang x yang dikonsumsi, konsumen harus mengurangi jumlah konsumsinya terhadap barang y agar kepuasan yang diperoleh tetap sama. Suatu hal yang perlu diperhatikan lagi adalah kurva indiferen bentuknya cembung terhadap titik origin. Keadaan itu menunjukkan bahwa setiap pengurangan y dengan selisih yang sama yaitu Δy harus diimbangi oleh pertambahan x sebesar Δx yang nilainya semakin bertambah, agar tingkat kepuasan yang sama dapat dipertahankan. Ini sesuai dengan hukum substitusi yang menyatakan bahwa suatu barang yang semakin langka, nilai substitusinya semakin besar terhadap barang yang melimpah.

Ciri-ciri kurva indiferen adalah sebagai berikut :

- Kurva indiferen mempunyai nilai kemiringan negatif (*negatively slope*), atau pernah mempunyai nilai kemiringan positif. Hal ini berarti bahwa bila konsumsi suatu jenis barang ditambah maka konsumsi barang lain harus dikurangi. Bentuk ekstrim dari kurva indiferen adalah sejajar sumbu vertikal dan sejajar sumbu horizontal
- Bentuk kurva indiferen cembung ke titik origin (titik O), hal ini menunjukkan derajat pengantian barang yang semakin menurun. Derajat penggantian digunakan untuk mengetahui berapa jumlah barang yang harus dikurangi untuk menambah barang lain agar kepuasan yang diterima tetap sama.
- Kurva indiferen tidak saling berpotongan, karena apabila saling berpotongan maka tidak konsisten dengan difinisinya. Kurva indiferen yang tinggi menggambarkan kepuasan yang lebih tinggi.

Fungsi yang dipakai untuk menunjukkan kurva indiferen adalah lingkaran, hiperbola dan parabola. Perhatikan gambar berikut ini:



Pada gambar (a), kurva indiferen ditunjukkan oleh bagian dari lingkaran dengan persamaan: $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$

Bila parameter a diubah, maka titik pusat (a, a) akan bergeser dan jari-jari lingkaran = a juga akan berubah sehingga didapat himpunan lingkaran. Jadi yang digunakan sebagai kurva indiferen hanyalah seperempat lingkaran yaitu bagian yang menyinggung sumbu x dan sumbu y. Persamaan dengan bentuk umum seperti ditunjukkan di atas bentuknya dapat diubah menjadi:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 2xy$$
$$(x + y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 2xy$$

$$(x + y - a)^2 = 2xy$$
$$x + y - a = \sqrt{2xy}$$
$$x + y - \sqrt{2xy} = a$$

Contoh soal 1.

Bila kurva indiferen seorang konsumen dapat ditunjukkan oleh persamaan $x + y - \sqrt{2xy} = a$ dan andaikan kepuasan seseorang dapat diukur, maka berapakah jumlah barang y yang harus dikonsumsi pada saat mengkonsumsi barang x sebanyak 3 unit agar tingkat kepuasannya tetap 15 satuan?

Jawaban:

$x = 3, a = 15$

Jadi $3 + y - \sqrt{6y} = 15$ atau

$y - 12 = \sqrt{6y}$

$y^2 - 24y + 144 = 6y$

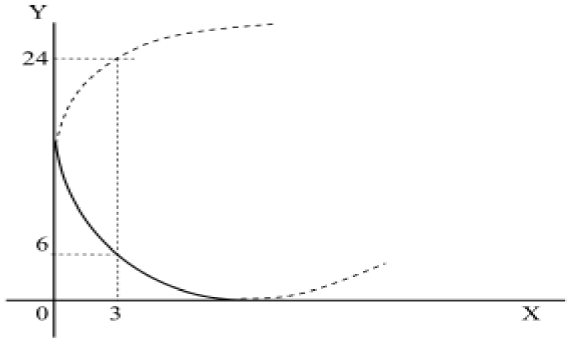
$y^2 - 30y + 144 = 0$

$y^2 - 24y – 6y + 144 = 0$

$(y - 24)(y - 6) = 0$

Jadi $y_1 = 6$ dan $y_2 = 24$

Bila tidak ada barang x yang dikonsumsi, maka agar tingkat kepuasannya tetap 15 satuan, jumlah barang y yang dikonsumsi adalah y = 15, oleh se itu pada tingkat kepuasan yang sama ia tidak mungkin mengkonsumsi sebanyak 24 unit. Jadi jumlah barang y yang dikonsumsi adalah 6 unit.



Bagian dari hiperbola juga dapat dipakai untuk menunjukkan kurva indiferen. Pada gambar (b) dipakai hiperbola sama sisi dengan titik pusat (-h,-k) yang terletak di kuadran ketiga. Bentuk persamaan hiperbola ini adalah: $(x + h)(y + k) = a$

dengan asimtot $x = -h$ dan $y = -k$

titik potong dengan sumbu $x = a/k - h$

titik potong dengan sumbu $y = a/h - k$

Bagian hiperbola yang digunakan untuk kurva indiferen adalah bagian yang berada di kuadran pertama. Bila tingkat kepuasan a diubah-ubah besarnya, maka diperoleh himpunan kurva indiferen.

Contoh Soal 2.

Seorang konsumen dalam mengkonsumsi barang x dan y kepuasannya ditunjukkan oleh persamaan:

$$xy + y + 6x = a - 6$$

Tentukan titik pusat hiperbola dan berapakah jumlah maksimum barang x yang dapat dikonsumsi bila tingkat kepuasannya sebesar 30 satuan**?**

Jawaban:

a = 30.....................$xy + y + 6x + 6 = 30$

$$y(x + 1) + 6(x + 1) = 30$$

$$(x + 1) \times (y + 6) = 30$$

Titik pusat = (-1,-6)

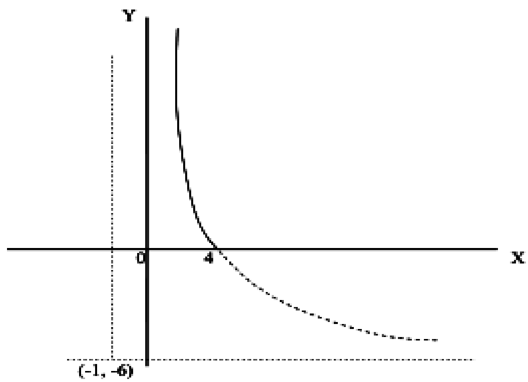
Jumlah maksimum barang x yang dapat dikonsumsi terjadi bila tidak ada barang y yang dikonsumsi (y = 0).

Jadi $(x + 1)6 = 30$..............$6x + 6 = 30$

$$6x = 30 - 6$$

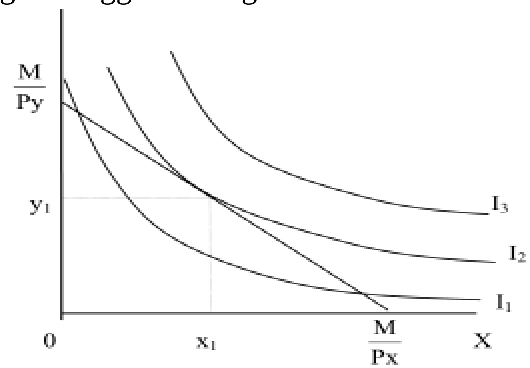
$$x = 24/6$$

= 4 (barang x dikonsumsi = 4).



Seorang konsumen yang menghadapi himpunan kurva indiferen selalu berusaha untuk melakukan konsumsi pada titik yang berada di kurva indiferen yang paling jauh dari titik origin, karena kepuasan yang di dapat lebih besar atau karena dengan kombinasi tersebut ia dapat mengkonsumsi baik barang x maupun barang y dalam jumlah yang cukup banyak. Akan tetapi kebebasan memilih kurva indiferen dibatasi oleh jumlah uang yang dimilikinya. Dengan sejumlah uang tertentu (M) seorang konsumen dapat membelanjakan semuanya untuk membeli barang x saja dan memperoleh sebanyak M/P_x bila harga barang x adalah Px atau membelanjakan jumlah uang M tersebut untuk membeli barang y saja dan memperoleh sebanyak M/P_y bila harga barang y adalah Py (lihat gambar di bawah).

Apabila dengan uang sebanyak M itu akan digunakan untuk membeli barang x dan y, maka kombinasi jumlah barang x dan y yang dapat dibeli ditunjukkan oleh garis lurus yang menghubungkan titik M/Px dan M/Py. Garis ini disebut dengan garis anggaran atau *budget line*. Tingkat kepuasan yang maksimum dicapai bila konsumen membelanjakan uangnya sebanyak M untuk membeli y_1 barang y dan x_1 barang x, yaitu pada posisi persinggungan antara garis anggaran dengan kurva indiferen.



Posisi ini menunjukkan posisi kepuasan yang maksimum atau posisi equilibrium konsumen dengan kendala M, karena I_2 adalah kurva indiferen yang tertinggi yang dapat dicapai oleh garis anggaran tersebut. Jadi dengan kurva indiferen dan garis anggaran dapat ditunjukkan berapa jumlah barang x dan y yang harus dibeli oleh konsumen yang memiliki sejumlah uang tertentu agar kepuasannya maksimum.

Contoh soal 3;

Himpunan kurva indiferen konsumen ditunjukkan oleh persamaan xy = a. Bila persamaan garis anggaran yang dihadapi oleh konsumen adalah 2x + 5y = 100, maka tentukan kombinasi jumlah barang x dan y yang akan dikonsumsi olehnya!

Jawaban:

Persamaan indiferen: xy = a

Persamaan garis anggaran: 2x + 5y = 100.

Langkah pertama adalah memotongkan garis anggaran dengan persamaan indiferen dengan cara menyelesaikan kedua persamaan secara serentak

yaitu:

$2x + 5y = 100$

$5y = 100 - 2x$

$y = \frac{100-2x}{5} = 0.2\,(100 - 2x)$

$\quad = 20 - 0.4x$

Kemudian substitusikan ke dalam persamaan indiferen yaitu:

$$xy = a$$

$$xy = x(20 - \frac{2}{5}x) = a$$

$$= 20x - \frac{2}{5}x^2 = a$$

$$\frac{2}{5}x^2 - 20x + a = 0$$

$$x^2 - \frac{20}{\frac{2}{5}}x + \frac{a}{\frac{2}{5}} = 0 \Rightarrow x^2 - 50x + \frac{5}{2}a = 0$$

Agar persamaan mempunyai akar kembar yaitu titik singgung garis anggaran dengan kurva *indiferen*, harus dipenuhi syarat:

$50^2 - 4\ (\frac{5}{2}\ a) = 0$......................$2500 - 10a = 0$

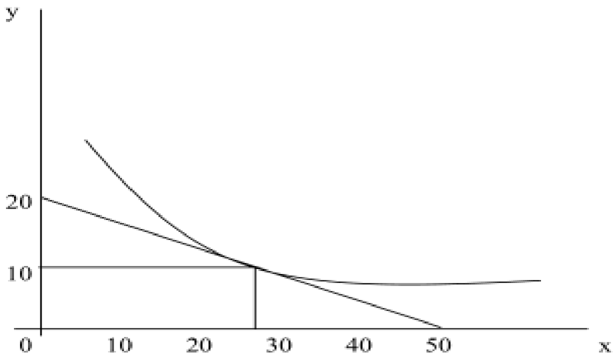
$a = 250$

jadi $X^2 - 50X + (\frac{5}{2}\ .250) = 0$.... $X^2 - 50X + 625 = 0$

$(X - 25)^2 = 0$

$X = 25$

Jadi barang x yang dikonsumsi 25 unit dan barang y 10 unit.



Latihan Soal

1. Bila himpunan kurva indiferen diketahui $(x + 2)(y + 1) = a$ dan harga barang x adalah Rp 4,00 dan barang y Rp 6,00 per unit, sedangkan jumlah uang yang dimiliki Rp130,00. Tentukan jumlah barang x dan y yang akan dikonsumsi.
2. Gambarkan himpunan kurva indiferen dengan persamaan:

   $(x + 2)(y + 1) = a$ untuk berbagai nilai a.
3. Bila himpunan kurva indiferen diketahui $4x^2 - 2xy - 6y^2 = a$ dan persamaan garis anggaran adalah $x + y = 72$, maka tentukan jumlah barang x dan barang y yang dibeli konsumen.
4. Seorang konsumen mempunyai kurva indiference yang ditunjukkan oleh persamaan $xy = a$, persamaan garis anggaran yang dihadapi adalah $5y + 6x = 60$. Tentukan

Gambarkan keadaan keseimbangan jumlah barang x dan y yang dikonsumsi.

XI. DIFERENSIAL (TURUNAN) FUNGSI SEDERHANA

Dalam ilmu ekonomi dan bisnis dikenal adanya suatu keseimbangan atas suatu kondisi ekonomi dan bisnis, baik itu keseimbangan pasar tertutup (*price equilibrium* dan *quantity equilibrium*), keseimbangan pendapatan nasional, atau kasus-kasus keseimbangan lainnya. Keseimbangan suatu kondisi ekonomi dan bisnis tentunya tidak senantiasa berada pada satu titik. Keseimbangan akan berubah seiring dengan adanya perubahan variabel yang mempengaruhinya, baik variabel dalam model atau variabel luar model. Adanya perubahan nilai atas suatu variabel dalam sebuah model (persamaan) tentunya akan dapat mempengaruhi nilai dari variabel lainnya. Seberapa besar tingkat perubahan (*rate of change*) suatu variabel akan mempengaruhi tingkat perubahan variabel lainnya sering dapat diselesaikan dengan pendekatan diferensial.

Secara umum diferensial membahas tentang pengaruh perubahan suatu variabel terhadap variabel lainnya dalam suatu persamaan matematika. Diferensial diartikan sebagai tingkat perubahan suatu fungsi atas adanya perubahan

variabel bebas dari fungsi tersebut, dengan perubahan kecil dalam variabel bebas fungsi yang bersangkutan. Dengan diferensial dapat diketahui posisi dari fungsi yang sedang dipelajari seperti titik maksimum, titik belok ataupun titik minimum. Konsep diferensial menjadi salah satu alat analisis yang penting dalam ekonomi dan bisnis. Perhitungan
diferensial merupakan suatu perhitungan yang menyangku t masalah perubahan fungsi, maka sebagai kaitan permasalahan yang muncul di dalam teori ekonomi dan bisnis diantaranya penghitungan Laba (keuntungan), Investasi serta Pajak.

Berdasarkan manfaat – manfaat inilah konsep diferensial menjadi salah satu alat analisis yang sangat penting dalam bisnis dan ekonomi dan bisnis. Sebagaimana diketahui, analisis dalam bisnis dan ekonomi dan bisnis sangat akrab dengan masalah perubahan, penentuan tingkat maksimum dan tingkat minimum. Pendekatan kalkulus diferensial amat berguna untuk menyidik bentuk gambar suatu fungsi non linear. Dengan mengetahui besarnya harga dari turunan pertama (*first derivative*) sebuah fungsi, akan dapat dikenali bentuk gambar dari fungsi tersebut.

Hubungan secara umum antara sebuah fungsi dan fungsi-fungsi turunannya. Berdasarkan kaidah deferensi, dapat di ketahui bahwa turunan dari suatu fungsi berderajat “n” adalah sebuah fungsi berderajat “n-1”. Dengan perkataan lain, turunan dari fungsi berderajat 3 adalah sebuah fungsi berderajat 2, turunan dari fungsi berderajat 2 adalah sebuah fungsi berderajat 1, turunan dari fungsi berderajat 1 adalah sebuah fungsi berderajat 0 atau konstanta, dan akhirnya turunan dari sebuah konstanta adalah 0.

A. Macam-Macam Teorema Diferensial

Proses pencarian turunan suatu fungsi langsung dari definisi turunan yakni dengan menyusun hasil bagi dengan selisih dan menghitung limitnya dapat memakan waktu dan membosankan. Untuk itu dikembangkan cara-cara yang memungkinkan untuk memperpendek proses dan akan memungkinkan untuk mencari turunan semua fungsi yang tampaknya rumit dengan segera.

Turunan suatu fungsi f adalah fungsi lain f'. Jika $f(x) = x^3+7x$ adalah rumus untuk f, maka $f'(x) = 3x^2+7$ adalah rumus untuk f'. Ketika menurunkan f, artinya mendiferensiasikan f. Turunan mengoperasikan f untuk menghasilkan f'. Biasanya menggunakan simbol D_x untuk menandakan operasi diferensial. Simbol D_x menyatakan turunan (terhadap peubah x). Maka menuliskan $D_x f(x) = f'(x)$ atau $D_x(x^3+7x) = 3x^2+7$.

Teorema A, Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = k$ dengan k suatu konstanta, maka untuk sembarang x, $f'(x) = 0$; yakni $D_x f(x) = 0$

Teorema B. Aturan Fungsi Identitas

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$; yakni $D_x(x) = 1$

Teorema C. Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$; yakni $D_x(x^n) = nx^{n-1}$

Di dalam kurung, semua suku kecuali yang pertama mempunyai *h* sebagai faktor, sehingga masing-masing suku mempunyai limit 0 bila *h* mendekati 0. Jadi D_x adalah Operator linier Operator D_x berfungsi sangat baik bilamana diterapkan pada kelipatan konstanta fungsi atau pada jumlah fungsi.

Teorema D. Aturan Kelipatan Konstanta

Jika *k* suatu konstanta dan *f* suatu fungsi yang terdiferensiasikan, maka$(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$; yakni, $D_x[k \cdot D_x f(x)] = k \cdot D_x f(x)$

Jika dinyatakan dalam kata-kata, *suatu pengali konstanta k dapat dikeluarkan dari operator Dx.*

Teorema E. Aturan Jumlah

Jika *f* dan *g* adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$; yakni, $D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$

Jika dinyatakan dalam kata-kata, *turunan dari suatu jumlah adalah jumlah dari turunan-turunan.*

Teorema F. Aturan Selisih

Jika *f* dan *g* adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$; yakni, $D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$

Teorema G. Aturan Hasilkali

Jika *f* dan *g* adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka

$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$; yakni, $D_x[f(x) \cdot g(x)] = f(x)\, D_x g(x) + g(x)\, D_x f(x)$

Aturan ini hars dihafalkan dalam kata-kata sebagai berikut: *Turunan hasilkali dua fungsi adalah fungsi* *pertama dikalikan turunan fungsi yang kedua ditambah fungsi kedua dikalikan turunan fungsi yang pertama.*

Teorema H. Aturan Hasilbagi

Sangat disarankan untuk menghafalkan ini dalam kata-kata, sebagai berikut: *Turunan suatu hasilbagi adalah sama dengan penyebut dikalikan turunan pembilang dikurangi pembilang dikalikan turunan penyebut, seluruhnya dibagi dengan kuadrat penyebut*

B. Penerapan Diferensial Eonomi: Elatisitas Titik

Persamaan diferensial memegang peranan penting dalam rekayasa, fisika, ilmu ekonomi dan bisnis dan berbagai macam disiplin ilmu lain. Persamaan diferensial muncul dalam berbagai bidang sains dan teknologi, bilamana hubungan deterministik yang melibatkan besaran yang berubah secara kontinu (dimodelkan oleh fungsi matematika) dan laju perubahannya (dinyatakan sebagai turunan) diketahui atau dipostulatkan.

Diferensial mempunyai aplikasi dalam semua bidang kuantitatif. Dalam riset operasi, turunan menentukan cara paling efisien dalam memindahkan bahan dan mendesain pabrik. Dengan menerapkan teori permainan, turunan dapat memberikan strategi yang paling baik untuk perusahaan yang sedang bersaing. Turunan sering digunakan untuk mencari titik ekstrem sebuah fungsi. Persamaan-persamaan yang melibatkan turunan disebut persamaan diferensial, sering muncul dalam berbagai bidang matematika, seperti analisis kompleks, analisis fungsional, geometri diferensial, dan bahkan aljabar abstrak.

Konsep elastisitas pada dasarnya berhubungan erat dengan konsep derivatif. Hubungan antara harga suatu barang terhadap jumlah barang tersebut diminta. Elastisitas dari suatu fungsi y=f(x) berkenaan dengan x dapat didefinisikan sebagai :

$$\boldsymbol{\eta = Ey/Ex = \frac{(\Delta y/y)}{(\Delta x/x)} = dy/dx \cdot x/y}$$

Ini berarti bahwa elastisitas y=f(x) merupakan limit dari rasio antara perubahan relatif dalam y terhadap perubahan relatif dalam x, untuk perubahan x yang sangat kecil atau mendekati nol. Dengan terminology lain, elastisitas y terhadap x dapat juga dikatakan sebagai rasio antara persentase perubahan y terhadap perubahan x.

a. Elastisitas Permintaan

Elastisitas permintaan (istilahnya yang lengkap: elastisitas harga-permintaan, *price elasticity of demand*) merupakan suatu koefisien yang menjelaskan besarnya pengaruh perubahan jumlah barang yang diminta akibat adanya perubahan harga. Jadi merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang diminta terhadap persentase perubahan harga. Jika fungsi permintaan dinyatakan $Q_d = f(P)$, maka elastisitas permintaanya:

$$\eta d = \frac{\%\Delta Qd}{\%\Delta P} = \frac{Eqd}{EP}$$

$$= \frac{(\Delta Qd/Qd)}{(\Delta P/P)} = \; = \left(\frac{dQd}{dP}\right)\left(\frac{\mathbf{P}}{Qd}\right)$$

Dimana dQd/dP tak lain adalah Q'_d atau $f'(P)$

Permintaan akan suatu barang dikatakan bersifat elastis apabila ηd >1, *elastic – uniter* jika ηd=1, dan inelastis bila ηd<1. Barang yang permintaanya elastis mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut berubah sebesar persentase tertentu, maka permintaan terhadapnya akan berubah (secara berlawanan arah) dengan persentase yang lebih besar daripada persentase perubahan harganya.

Contoh soal 1:

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukan oleh persamaan $Q_d = 15 - 4P^2$. tentukan elastisitas permintaannya pada tingkat harga P = 5.

$Q_d = 15 - 4P^2$

$$\eta d = \left(\frac{dQd}{dP}\right)\left(\frac{P}{Qd}\right) = -8P \cdot P/15-4P^2 .$$

$$Q'd = \frac{dQd}{dP} = -8P$$

$$= (-8.5).\ 5/25-100=2,7 \text{ (elastik)}$$

ηd = 2,7 berarti bahwa apabila, dari kedudukan P = 5, harga naik (turun) sebesar 1 persen maka jumlah barang yang diminta akan berkurang (bertambah) sebanyak 2,7 %.

b. Elastisitas Penawaran

Elastisitas penawaran (istilahnya yang lengkap: elastisitas harga-penawaran, *price elasticity of supply*) merupakan suatu koefesien yang menjelaskan besarnya pengaruh perubahan jumlah barang yang ditawarkan akibat adanya perubahan harga. Jadi merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan terhadap prosentase perubahan harga.

Jika fungsi penawaran dinyatakan dengan $Q_s = f(P)$, maka elastisitas penawarannya :

$$\eta s = \frac{\%\Delta Qs}{\%\Delta P} = \frac{Eqs}{EP}$$

$$= \frac{(\Delta Qs/Qs)}{(\Delta P/P)} = \left(\frac{dQs}{dP}\right)\left(\frac{\mathbf{P}}{Qs}\right)$$

Dimana dQs/dP tak lain adalah Q'_s atau *f'(P).*

Penawaran suatu barang dikatakan bersifat elastic apabila s>1, elastic – uniter jika s=1 dan inelastic bila s<1. Barang yang penawarannya *inelastic* mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut (secara searah) dengan persentase yang lebih kecil daripada persentase perubahan harganya.

Contoh soal 2:

Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $Q_s = -200 + 7\ P^2$. Berapa elastisitas penawarannya pada tingkat harga P=10?

$Q_s = -200 + 7\ P^2$

$$\eta s = \left(\frac{dQs}{dP}\right)\left(\frac{\mathbf{P}}{Qs}\right)$$

$= 14P\ .\ P/-200+7P^2$

$$Q'_s = \frac{dQs}{dP} = 14\ P$$

Pada P = 10, $\eta s = 140\ .\ 10/-200+700=2{,}8$

s=2,8 berarti bahwa apabila dari kedudukan P = 10, harga naik (turun) sebesar 1 % maka jumlah barang yang ditawarkan akan bertambah (berkurang) sebanyak 2,8%.

c. Elastisitas Produksi

Elastisitas produk merupakan suatu koefisien yang menjelaskan besarnya pengaruh perubahan jumlah output yang dihasilkan akibat adanya perubahan jumlah input yang digunakan Jadi merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah output terhadap persentase perubahan jumlah input. Jika *P* sebagai jumlah produk yang dihasilkan sedangkan *X* melambangkan jumlah factor produksi yang digunakan, dan fungsi produksi dinyatakan dengan *P = f(X)*, maka efisiensi produksinya :

$$\eta p = \frac{\%\Delta P}{\%\Delta X} = \frac{EP}{EX} = \frac{(\Delta P/P)}{(\Delta X/X)} = \frac{(dP)}{(dX)}.XP$$

Dimana $\frac{(dP)}{(dX)}$ adalah produk marjinal dari X [*P'* atau *f' (X)*].

Contoh soal 3 :

Fungsi produksi suatu barang ditunjukan oleh persamaan $P = 6X^2 - X^3$. Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan factor produksi sebanyak 3 unit dan 7 unit.

$P = 6X^2 - X^3$......$P' = \frac{(dP)}{(dX)} = 12X - 3X^2$

$\eta p = \frac{(dP)}{(dX)}.XP = \frac{(12X - 3X2).X}{(6X2 - X3)}$

Pada X = 3, ηp= 36- 27 . 3(54-27)=1

Pada X = 7, ηp= 84- 147 . 7(294-343)=9

p=1 berarti bahwa, dari kedudukan X = 3, maka jika jumlah input dinaikkan (diturunkan) sebesar 1% maka jumlah output akan bertambah (berkurang) sebanyak 1 %

Dan p = 9 berarti bahwa, dari kedudukan X = 7, maka jika jumlah input dinaikkan (diturunkan) sebesar 1% maka jumlah output akan bertambah (berkurang) sebanyak 9 %

c. Pendapatan Konsumsi

Dalam ekonomi dan bisnis makro, pendapatan masyarakat suatu negara secara keseluruhan (pendapatan nasional) dialokasikan ke dua kategori penggunaan, yakni dikonsumsi dan ditabung. Jika pendapatan dilambang dengan Y, sedangkan konsumsi dan tabungan masing – masing dilambangkan dengan C dan S, maka dapat merumuskan persamaan:

$$Y = C + S$$

Baik konsumsi nasional maupun tabungan nasional pada umumnya dilambangkan sebagai fungsi linear dari pendapatan nasional. Keduanya berbanding lurus dengan pendapatan nasional. Semakin besar pendapatan nasional maka konsumsi dan tabungan akan semakin besar pula. Sebaliknya apabila pendapatan berkurang, konsumsi dan tabungan juga berkurang, sehingga :

$DY = \partial C + \partial S$ □ diferensial

Karena $\partial C + \partial S = dY$ □ $dY/dY = \partial C/dY + \partial S/dY$ □ derivasi

$\partial C/dY$ = MPC (*Marginal Propensity to Consume*)

$\partial S/dY$ = MPS (*Marginal Propensity to Save*)

Sehingga terbukti bahwa MPC + MPS = 1

d. Pendapatan Tabungan

Konsep diferensial dengan mudah dapat diperluas menjadi fungsi yang terdiri dari dua atau lebih variabel bebas. Perhatikan fungsi tabungan berikut ini :

S = S (Y,i)

Dimana S adalah tabungan (*savings*). *Y* adalah pendapatan nasional (*national income*), dan i adalah suku bunga (*interest rate*). Fungsi ini asumsikan seperti semua fungsi yang akan gunakan disini diasumsikan kontinu dan memiliki derivative (parsial) kontinu, atau secara simbolis, f Є C'.

Derivatif parsial δS/δY mengukur kecenderungan marginal (marginal propensity to save). Jadi, untuk semua perubahan dalam *Y, dY*, perubahan S hasilnya dapat diaproksima dengan kuantitas (δS/δY)dY. Demikian juga jika perubahan dalam i, di dapat (δS/δi)di sebagai aproksimasi untuk menentukan perubahan *S* yang dihasilkan. Jadi perubahan total dalam *S* diaproksimsi dengan diferensial

$$dS = \frac{SY}{dY} + \frac{Si}{di}$$

Perhatikan bahwa kedua derivatif parsial S_y dan S_i kembali menaikan peran sebagai “peubah” yang masing–masing merubah mengubah *dY* dan di menjadi *dS* yang bersesuaian. Pernyataan *dS,* yang merupakan jumlah perubahan–perubahan hasil aproksimasi dari kedua sumber, disebut diferensial total dari fungsi tabungan. Dan proses untuk mencari diferensial total ini disebut diferensiasi total (*total differentiation*), sebaliknya kedua komponen yang ditambahkan di ruas kanan disebut sebagai diferensial parsial dari fungsi tabungan.

Tentu saja ada kemungkinan dimana Y dapat berubah sedangkan i konstan. Dalam hal ini di = 0 dan diferensial total akan disederhanakan menjadi diferensial parsial: $dS=\frac{\delta S}{\delta Y}.dY$. Dengan membagi kedua sisi persamaan dengan *dY* diperoleh $\frac{\delta S}{\delta Y}=(\frac{dS}{dY})_{i\ konstan}$

C. Laju Pertumbuhan (Fungsi Marginal)

Fungsi Marginal merupakan turunan pertama dari fungsi-fungsi total yang merupakan fungsi ekonomi dan bisnis. Fungsi Marginal menggambarkan laju pertumbuhan suatu variabel terikat akibat perubahan variabel bebasnya. Secara umum jika diberikan fungsi total sebagai berikut: y = f(X), maka diperoleh fungsi marginal dy/dx: laju perubahan y akibat perubahan x sebanyak 1 unit.

- Jika fungsi marginal itu hasilnya positif, dikatakan peru bahan searah: artinya jika x bertambah 1 unit maka y akan bertambah pula atau sebaliknya jika x berkurang 1 unit maka y akan berkurang.
- Jika fungsi marginal hasilnya negatif, maka dikatakan p erubahannya tidak searah, yang artinya jika x bertambah 1 unit, maka y berkurang atau sebaliknya jika x berkurang 1 unit maka y akan bertambah.

Contoh soal: Marginal Pendapatan (*Marginal revenue*)

Fungsi permintan diberikan P= 3q + 275. Bagaimanakah fungsi marginal pendapatannya dan berapa nilai marginal pendapatanya jika perusahaan memproduksi 10 output, serta terangkan artinya.

Jawab: fungsi total pendapatan (*total revenue*)

R = P.Q ....R = (3Q +27)Q.............R = $3Q^2 + 27Q$

Fungsi *Marginal revenue* MR = $\frac{dR}{dQ}$ = 6Q + 27. Jika perusahan berproduksi pada tingkat output Q = 10, maka MR = $\frac{dR}{dQ}$ = 6Q + 27 = 6(10)+27 = 87. Artinya: untuk setiap peningkatan penjualan Q sebanyak 1 unit akan menyebabkan tambahan pendapatan sebesar 87 dan sebaliknya.

Contoh Soal: Fungsi pendapatan rata-rata (*average revenue*) diberikan AR= 80-4Q. Bagaimana fungsi marginal pendapatanya dan berapa berapa nilai marginal pendapatannya jika perusahaan memproduksi 7 output.

Jawab: Fungsi total pendapatan (*Total Revenue*)

R = AR. Q........R = (80-4Q). Q..... R= $80Q – 4Q^2$

Fungsi marginal pendapatan (*Marginal Reven*ue)

MR = $\frac{dR}{dQ}$ = 80 – 8Q. Jika perusahaan memproduksi pada tingkat output Q = 7; maka MR $\frac{dR}{dQ}$ = 80 – 8(7) = 80 - 56 =24. Artinya: untuk setiap peningkatan output Q yang di jual sebanyak 1 unit akan menyebabkan adanya tambahan pendapatan sebesar 24 demikian juga sebaliknya

Contoh soal: Marginal Biaya (*marginal cost*), Fungsi total biaya suatu perusahaan dinyatakan sebagai $C = Q^3 - 4Q^2 + 10Q + 75$. Bagaimanakah fungsi marginal biayanya (*Marginal cost*) dan berapakah nilai marginal biaya tersebut jika perusahaan memproduksi 2 penjualan, serta terangkan artinya.

Jawab; Fungsi total biaya: $C = Q^3 - 4Q^2 + 10Q + 75$

Fungsi Marjinal Biaya $C = 3Q^2 - 8Q + 10$

Jika perusahaan berproduksi pada tingkat penjualan Q = 2, maka $MC = C = 3Q^2 - 8Q + 10 = C = 3(2)^2 – 8(2) + 10 = 8$, artinya: untuk setiap peningkatan penjualan Q yang dijual 1 unit akan menyebabkan adanya tambahan biaya sebesar 8, demikian juga sebaliknya.

Contoh soal: Memaksimasi Total Pendapatan (*Total revenue*) Fungsi harga jual barang: $P = -2Q + 16$, tentukan berapa output yang harus diproduksi dan dijual agar diperoleh total pendapatan maksimum..

Jawab: Fungsi total pendapatan : $P = -2Q + 16$, maka

$$R = P.Q = (-2Q + 16).Q$$

$$R = -2Q^2 + 16Q$$

Langkah pertama mencari diferensial fungsi total pendapatan kemudian dibuat = 0......$R' = - 4Q + 16 = 0$

$$- 4Q = - 16, \text{ maka } Q = 4$$

Agar penjualan sebanyak Q = 4 akan diperoleh total pendapatan maksimal, maka dilakukan langkah ke 2 yaitu mencari turunan kedua fungsi total pendapatan: $R'' = - 4$. (< 0 maka diperoleh nilai maksimum). Jadi output yang harus diproduksi dan dijual agar diperoleh total pendapatan maksimum yaitu sebanyak 4.

Total pendapatan maksimumnya: $R = -2Q^2 + 16Q$

$R = -2(4)^2 + 16(4)$

$R = 32$

Artinya Total pendapatan maksimum sebesar 32 akan diperoleh jika menjual produk sebanyak 4.

Contoh soal: Meminimumkan Total Biaya (*total Cost*)

Biaya total memproduksi suatu barang dinyatakan dengan persamaan C (*cost*) = $5Q^2 - 1000Q + 85000$. Pada tingkat produksi berapakah akan menyebabkan total biaya minimum? Berapakah total biaya minimum tersebut?

Jawab: C (*cost*) = $5Q^2 - 1000Q + 85000$

$C' = 10Q + 1000 = 0$........$10Q = 1000$

$Q = 10$

$C'' = 10 > 0$, maka total biaya minimum akan tercapai jika berproduksi barang sebanyak 100 unit.

Total biaya minimumnya sebesar : $C = 5Q^2 - 1000Q + 85000$

$C = 5(100)^2 – 1000(100)+85000$

$C = 35000$,

Jadi total biaya minimumnya sebesar 35000.

Contoh Soal: Memaksimalkan Laba (Profit)

Diberikan fungsi permintaan $P = 1000-2Q$ dan fungsi biaya $C = Q^3 - 59Q2 + 1315Q + 2000$. Berapakah produk yang harus diproduksi dan dijual sehingga diperoleh keuntungan maksimal?Berapakah laba maksimal tersebut?

Jawab:

Fungsi Pendapatan $R = P \cdot Q$

$R = (1000\text{-}2Q).Q$

$R = 1000\,Q - 2Q^2$

Fungsi Biaya....$C = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$

Fungsi Laba....Laba = pendapatan (R) – Biaya (C)

$= (1000Q\text{-}2Q^2) - (Q^3\text{-}59Q^2\text{+}1315Q\text{+}2000)$

$= -Q^3 + 57\,Q^2 + 315Q - 2000$

Turunan pertama; Laba' $= -\,3Q^2 + 114\,Q - 315$

$= -\,Q^2 + 38\,Q - 105$

$= (Q - 3)(Q - 35)$......$Q_1 = 3$ dan $Q_2 = 35$

Turunan kedua; Laba" $= -\,6Q + 114$

Untuk $Q = 3$ maka turunan kedua $L" = 126 > 0$, berarti jika diproduksi sebanyak 3 maka labanya akan minimum.

Untuk $Q = 35$ maka turunan kedua Laba" $= -\,66 < 0$, berarti jika diproduksi sebanyak 3 maka labanya akan minimum.

Laba maksimumnya sebesar: Laba $= Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$

$= 13\,925.$

Jadi dengan memproduksi dan menjual sebanyak 35 akan diperoleh laba maksimum sebesar 13.925.

DAFTAR PUSTAKA

Aji, S. 2013. Matematika Ekonomi dan bisnis:iuo o konsep dasar teori diferensial dan penerapannya dalam bisnis dan ekonomi dan bisnis. Universitas Wijaya Putra.

Al-Arif, M.N.R. 1997. Matematika Terapan untuk Ekonomi dan bisnis. Putaka Setaa Bandung

Alpha C. C .1984. *Fundamental ethods of Mathematical Economics*, 8th Edition, McGraw-Hill, Singapore.

Baldani, J, J Bradfield and R. Turne. 1996. *Mathematical Economics*. The Dryden Press, Harcourt Brace College Publisher

Budhi, W.S. 2001. Kalkulus Variabel Banyak dan Penggunaannya. Bandung: ITB.

Chiang, A.C. 1984. Dasar-Dasar Matematika Ekonomi dan bisnis. Terjemahan oleh Susatio Sudigyo dan Nartanto. Jakarta: Erlangga.

Chiang, A.C. dan K. Wainwright. 2005. Dasar-Dasar Matematika Ekonomi dan bisnis. (Edisi ke-4). Terjemahan oleh Susatio Sudigyo dan Nartanto. Jakarta: Erlangga.

Dumairy.1999. Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi dan bisnis, Yogyakarta, BPFE UGM. 125p

Edward T. D. 1980, *Mathematics for Economists*, McGraw-Hill, Inc. 210p

Guirguis, M.Z. 2018. Introduction to Mathematical Economics: A Practical Guide for Second and Third Year Undergraduate Students. Elseiver. 118p

Haeussler, E.F. and R. S. Paul. 1996. *Introductory Mathematical Analysis for Business Economics, and The Life and Social Sciences*. Eighth Edition, Prentice Hall International Inc.

Hoy, M., J. Livernois, C. McKenna, R. Rees and T. Stengos. 1996. *Mathematics for Economics*. Addison-Wesley Publisher Limited.

Jacques, I. (1995). *Mathematics for Economics and Business*. Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company.

Jean E. W, 1996. *Mathematical Analysi*, *Business and Economic Applications,* Fourth Edition, Harper & Row, Publisher, New York.

Joseph K, 2002. Matematika Ekonomi dan bisnis dan Bisnis, Penerbit Salemba Empat,

Luknanto, D. 2000. Pengantar Optimasi Nonlinear. Diktat Kuliah Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Gajah Mada.

Kenton, W. 2019. Mathematical Economics. Investopedia. 20p

Mulyono, Si. 2017. Matematika Ekonomi dan bisnis dan Bisnis. Edisi 2. Jakarta: Mitra Wacana Media

Pattiwael, J.F. 2001. Matematika Ekonomi dan bisnis. Penerbit Salemba Empat.

Purcell, E.J., Varberg, D., dan Rigdon, S.E. 2004. Kalkulus Jilid 2 (Edisi ke-8). Terjemahan Julian Gressando. Jakarta: Erlangga.

Sessu A. 2014. Pengantar Matematika Ekonomi dan bisnis. PT Bumi Aksara. Jakarta

Silberberg, E and Wing Suen. 2001 The Structure of Economics a Mathematical Analysis. Irwin McGraw-Hill.

Stewart, J. 2003. Kalkulus (Edisi ke-5). Terjemahan Destha Pangastiwi. Jakarta: Salemba Teknik

Supranto, J. 1987. Matematika untuk Bisnis dan Ekonomi dan bisnis. Jakarta: FE UI

Tarasov, V.E. 2018. On History of Mathematical Economics: Application of Fractional Calculus. Lomonosov Moscow State University. 28p

Taro Y, 1998. *Mathematics for Economist, An Elementary Survey*, Prentice Hall, Inc.

Teguh, M. 2016. Matematika Ekonomi dan bisnis. PT Raja Grafindo Persada. Jakarta:

Tjokroprajitno, S. 1994. Matematika Ekonomi dan bisnis. Fakultas Ekonomi dan bisnis Bisnis. Universitas Indonesia. Jakarta-Indonesia

Widayat, W. 2010. Matemtika Ekonomi dan bisnis. P.N Penebar Pustaka. Jakarta

Wijaya, A. 2014. Matematika Ekonomi dan bisnis I. Mitra Wacana Media.Jakarta

Wirawan, N. 2003. Cara Mudah Memahami Matematika Ekonomi dan bisnis Edisi Keempat. Denpasar: Keraras Emas

Wirawan, N. 2014. Matematika Ekonomi dan bisnis Edisi Kelima. Penerbit Keraras Emas. Denpasar

Wismantara, D.A. 2013. Matematika Ekonomi dan bisnis dan Bisnis. Penerbit Keraras Emas. Denpasar